7^{th} degree

Task 1. В зале собрались горожане, каждый из которых – либо честный, либо жулик, либо хитрец, и все друг про друга знают, кто есть кто. Каждый из честных написал на листе количество честных (включая себя), каждый жулик написал суммарное количество хитрецов и жуликов (включая себя), а каждый хитрец написал количество жуликов.
Затем в зал вошел секретарь, не знающий никого из присутствующих, и собрал все листы. В каком случае секретарь **не сможет** по написанным числам восстановить количество честных людей в зале?

Citizens gathered in the hall, and each of them is either honest, or a liar, or a tricky one, and everyone knows the truth about each other. Each of the honest ones wrote the number of honest ones (including himself), each liar wrote the total number of liars and tricksters (including himself), and each tricky man wrote the number of liars.
Then the secretary, who did not know any of those citizens, entered the hall and collected all the sheets. In what case will the secretary **not be able to** restore the number of honest people in the hall from the numbers written?

Решение (RUS). Пусть n – количество людей в зале, a – количество честных людей, b – количество хитрецов. Секретарь получит n листов, среди которых a будут содержать число a (написаны честными людьми); b листов содержат число $n-a-b$; $n-a-b$ листов содержат число $n-a$. Если $b=0$, то секретарь получит a листов с числом a и $n-a$ листов с числом $n-a$, и не сможет отличить честных людей от жуликов, если $a \neq n-a$. Значит, если $b=0$ и $n \neq 2a$, то секретарь не сможет определить количество честных людей.
Пусть теперь $b>0$. Заметим, что число, которое пишет честный, всегда равно количеству честных людей, а число, которое пишет жулик, больше количества жуликов: $n-a>n-a-b$ при $b>0$. Значит, секретарь сможет определить количество честных людей, если количество хитрецов не равно количеству жуликов, т.е. $b \neq n-a-b$. Если же $b=n-a-b$, то секретарь сможет отличить ответ жулика от остальных: он знает количество жуликов $n-a-b$ и среди чисел, написанных не-жуликами, ищет $n-a-b$.
Если ответы не-жуликов различаются, то те, кто написал $n-a-b$ – хитрецы: значит, секретарь найдет количество честных людей. Если же ответы не-жуликов одинаковые, то $a=n-a-b$, что вкупе с $b=n-a-b$ дает $a=b=\frac{n}{3}$. В этом случае секретарь может однозначно утверждать, что количество честных людей равно $\frac{n}{3}$.

Ответ. Секретарь не сможет определить количество четных горожан, если в зале нет хитрецов, а количество жуликов не равно количеству честных людей.

Solution (ENG). Let n be the total number of citizens in the hall, a be the number of honest ones, b be the number of tricksters. Secretary has got n sheets, among which a numbers a were assigned (written by honest citizens); b sheets show the number $n-a-b$; $n-a-b$ sheets show the number $n-a$. If $b=0$, then the secretary will count a lists with number a and $n-a$ lists with number $n-a$, and will not be able to distinguish honest people from liars when $a \neq n-a$. Thus, if $b=0$ and $n \neq 2a$, then the secretary will not be able to determine the number of honest people.
Lets consider $b>0$. Note, that the number that is written by honest citizen is always equal to the number of honest people in the hall, and the number that the liar writes is greater than the number of liars due to $n-a>n-a-b$ for $b>0$. By that, the secretary will be able to determine the number of honest people if the number of tricksters is not equal to the number of liars, i.e. $b \neq n-a-b$. In the opposite case, the secretary can distinguish the liar from the rest citizens because he knows the number of liars $n-a-b$ and looks for $n-a-b$ among the numbers written by non-liars.
If the answers of non-liars differ, then those who wrote $n-a-b$ are tricksters: thus the secretary will find the number of honest people. If non-liars' responses are all equal, then $a=n-a-b$, which with $b=n-a-b$ gives us $a=b=\frac{n}{3}$. In this case, the secretary can state that the number of honest people

is equal to $\frac{n}{3}$.

Answer. The secretary will not be able to restore the number of honest people if there are no tricksters in the hall, and the number of liars is not equal to the number of honest citizens.

Task 2. Дан правильный 100-угольник (все его стороны равны, все углы тоже равны). Докажите, что если соединить его вершины замкнутой ломаной так, чтобы в каждую вершину входило бы ровно два звена ломаной, то в этой ломаной найдутся два параллельных звена.

There is a regular polygon with 100 sides (all the sides are equal, all the angles are also equal). Prove that if we connect its vertices by a closed polyline so that each vertex contains exactly two links of the polyline, then the polyline contains two parallel segments.

Решение (RUS). Последовательно занумеруем вершины правильного 100-угольника целыми числами от 0 до 99. Тогда если k, l, m, n – номера вершин 100-угольника, то отрезки kl и mn параллельны тогда и только тогда, когда $k + l \equiv m + n \pmod{100}$.
Предположим, что в нашей ломаной нет параллельных звеньев. Пройдем по ней, складывая числа на каждом ребре. С одной стороны, мы получим сумму $2\cdot(0+1+2+\cdots+99) = 9900 \equiv 0 \pmod{100}$. С другой стороны, сумма чисел на каждом отрезке ломаной должна давать свой остаток по модулю 100, поэтому та же сумма равна $0 + 1 + \cdots + 99 \equiv 50 \pmod{100}$ — получили противоречие. Значит, наше предположение было неверно, и в ломаной обязательно найдутся два параллельных звена.

Solution (ENG). Lets sequentially enumerate the vertices of a regular 100-gon by integers from 0 to 99. Then the segments kl and mn are parallel if and only if $k+l \equiv m+n \pmod{100}$ (here k, l, m, n – numbers of vertices of a 100-gon).
Lets assume that there are no parallel edges in our polyline. Lets go through it, adding up the numbers on each edge. On the one hand, we get the sum $2 \cdot (0 + 1 + 2 + \cdots + 99) = 9900 \equiv 0 \pmod{100}$. On the other hand, the sum of the numbers on each edge of the polyline must give its unique remainder modulo 100, thus their sum is equal to $0 + 1 + \cdots + 99 \equiv 50 \pmod{100}$ — we got a contradiction. By that, our assumption was wrong, and there will definitely be two parallel edges in the polyline.

Task 3. На планете Рамануджан монетами служат титановые кубики. Длина ребра монеты-кубика – 1, 2, … , 8 в местных единицах измерения, а номинал равен ее весу. Вес самой маленькой монеты – 1 *джан*. Для удобства счёта стоимость в 9 джанов называется *раману*.
Вы купили товар стоимостью в целое число раману, заплатили 3 монеты и получили сдачу – несколько (меньше 8) джанов. Если ни одна из монет не была лишней (т.е. любых двух из трех не хватило бы), то какое количество джанов сдачи вы **не смогли бы** получить? Какова минимальная стоимость товара, если вы получили сдачу в 1 джан?

On the planet Ramanujan, titanium cubes serve as coins. The length of the edge of the coin-cube is 1, 2, ..., 8 in local units, and each coin's value is equal to its weight. The weight of the smallest coin is 1 *jan*. For ease of counting, the cost of 9 jans is called *ramanu*.
You bought an item worth a positive integer number of ramanues by paying 3 coin-cubes, and received a few (less than 8) jans as a change. If none of the coins were extra (i.e. any two of the three would not be enough), then how many jans of change would you **not be able to** receive? What is the smallest value of the item if you received a change of 1 jan?

Решение (RUS). Понятно, что номиналы имеющихся монет – кубы целых чисел от 1 до 8, и нам нужно исследовать делимость таких кубов на 9:

Номер монеты (длина ребра кубика)	1	2	3	4	5	6	7	8
Номинал (в джанах)	1	8	27	64	125	216	343	512
Остаток от деления номинала на 9	1	8	0	1	8	0	1	8

Таким образом, остаток при делении куба натурального числа на 9 может быть равен только 0, 1 или 8, т.е. сдача с одной монеты, если товар стоит целое число раману, может быть только $9n$, $9n+1$ или $9n+8$ джанов, где n – целое число. Согласно условию задачи, в операции участвовали три монеты, т.е. требуется найти остатки от деления суммы трех кубов целых чисел на 9.
$0+0+0=0$; $1+0+0=1$; $1+1+0=2$; $1+1+1=3$; $8+8+8=24$ (дает остаток 6 при делении на 9); $8+8+0=16$ (дает остаток 7 при делении на 9); $8+0+0=8$. Перебором остальных вариантов убеждаемся, что сумма трех кубов не может дать остатки 4 и 5 при делении на 9.
Теперь найдем минимальную стоимость товара, если сдача составила 1 джан. Тогда стоимость трех монет при делении на 9 дает остаток 1, а это возможно в двух случаях:
1) есть две монеты достоинством в целое число раману, а стоимость третьей дает остаток 1 при делении на 9 (тогда минимальная стоимость товара равна 27+27+64-1=117 джан = 13 раману);
2) стоимости двух монет дают остаток 1 при делении на 9, а стоимость третьей – остаток 8 (тогда их минимальная стоимость равна $8+64+64-1=135$ джан= 15 раману).
Как видим, наименьшая стоимость равна 13 раману.

Ответ. Нельзя получить 4 и 5 джанов; искомая минимальная стоимость товара равна 13 раману.

Solution (ENG). It is clear that the value of the available coins are cubes of integers from 1 to 8, and we need to look at their divisibility by 9:

No. of a coin (length of its edge)	1	2	3	4	5	6	7	8
Value (in jans)	1	8	27	64	125	216	343	512
Remainder when divided by 9	1	8	0	1	8	0	1	8

Thus, the remainder when dividing the cube of an integer by 9 can only be 0, 1 or 8, i.e. change from one coin (if the product costs an integer number of ramanues) can only be $9n$, $9n+1$ or $9n+8$ jans for n being an integer. According to the initial conditions, we got three coins in the operation, i.e. we need to find the remainder after dividing the sum of three cubes of integers by 9.
$0+0+0=0$; $1+0+0=1$; $1+1+0=2$; $1+1+1=3$; $8+8+8=24$ (gives remainder 6 when divided by 9); $8+8+0=16$ (gives remainder 7 when divided by 9); $8+0+0=8$. By checking other options we make sure that the sum of three cubes cannot give the remainder of 4 and 5 when divided by 9.
Now lets find the smallest value of an item if the change was 1 jan. Then the cost of three coins gives a remainder of 1 when divided by 9, and this is possible in two cases:
1) there are two coins of an integer ramanues, and the value of the third one gives a remainder of 1 when divided by 9 (then the smallest value of the item is 27+27+64-1=117 jan = 13 ramanues);
2) the values of two coins give remainder 1 when divided by 9, and the value of the third one gives remainder 8 (then their smallest value is $8+64+64-1=135$ jans= 15 ramanues).
We see that the smallest value is 13 ramanues.

Answer. You cannot get 4 and 5 jans of change; the required smallest value of the item is 13 ramanues.

Task 4. *(Задача предоставлена партнером олимпиады – компанией «Тинькофф»)*
Правильный шестиугольник $ABCDEF$ и правильный треугольник APQ не имеют общих внутренних точек. Известно, что $PB < QB$, и точка M – середина отрезка PB. Найдите угол между прямыми AM и QF.

A regular hexagon $ABCDEF$ and a regular triangle APQ have no common interior points. It is known that $PB < QB$, and the point M is the midpoint of the segment PB. Find the angle between lines AM and QF.

Решение (RUS). Отметим точку R на луче AM так, что $AR = 2 \cdot MR$, тогда четырехугольник $APRB$ – параллелограмм. $\angle FAB + \angle BAP + \angle PAQ + \angle QAF = 360°$, $\angle FAB = 120°$, $\angle PAQ = 60°$, поэтому $\angle BAP + \angle QAF = 180°$. С другой стороны, $\angle BAP + \angle RBA = 180°$ (т.к. $BR \parallel AP$), поэтому $\angle RBA = \angle QAF$, следовательно, треугольники RBA и FAQ равны по двум сторонам и углу между ними. Обозначим за T точку пересечения прямых AM и QF, тогда $\angle ATQ = \angle AFQ + \angle TAF = \angle BAR + \angle TAF = 180° - 120° = 60°$.

Ответ. $60°$

Solution (ENG). Lets mark a point R on the ray AM so that $AR = 2 \cdot MR$, then the quadrilateral $APRB$ is a parallelogram. $\angle FAB + \angle BAP + \angle PAQ + \angle QAF = 360°$, $\angle FAB = 120°$, $\angle PAQ = 60°$, so $\angle BAP + \angle QAF = 180°$. On the other hand, $\angle BAP + \angle RBA = 180°$ (since $BR \parallel AP$), so $\angle RBA = \angle QAF$, therefore, triangles RBA and FAQ are equal (by two sides and the angle between them). Denote by T the point of intersection of lines AM and QF, then $\angle ATQ = \angle AFQ + \angle TAF = \angle BAR + \angle TAF = 180° - 120° = 60°$.

Answer. $60°$

Task 5. Математик стоит на земле перед лестницей с n ступеньками. Когда математик поднимается, он может перешагнуть ровно через a ступенек (считая ту, на которую он наступил, и не считая ту, с которой начал движение), а когда спускается – ровно через b ступенек (аналогично, считая ту, на которую он наступил, и не считая ту, с которой начал движение).
Математик хочет с уровня земли («нулевая ступенька») подняться на самую верхнюю ступеньку и спуститься обратно на землю. Докажите, что наименьшее n, при котором это возможно, равно $a + b - (a, b)$.
Здесь (a, b) – наибольший общий делитель чисел a и b.

Mathematician is standing on the ground in front of a ladder with n stairs. When the mathematician goes up, he can step over exactly a stairs (counting the one he stepped on and not counting the one he started from), and when he goes down, he can step over exactly b stairs (similarly, counting the one he stepped on, and not counting the one from he started from).
The mathematician wants to move from the ground level («zero stair») to the highest stair, then return back to the ground. Prove that the smallest n which allows such route is $a + b - (a, b)$.
By (a, b) we denote the greatest common divisor of a and b.

Решение (RUS). При необходимости разделив a, b, n на (a, b), можно считать, что $(a, b) = 1$. Заметим, что если n не делится на (a, b), то подняться с нулевой ступеньки на верхнюю невозможно, поскольку после каждого шага математик будет стоять на ступеньке, номер которой кратен (a, b).
Сначала докажем, что $n \geq a + b - 1$. Пусть математик сумел подняться на верхнюю ступеньку и вернуться на землю, тогда найдется ступенька, в которой он побывал дважды (в частности, ступенька с номером 0), т.е. сделал цикл. Выберем среди всех таких ступенек ту, в цикле которой нет других циклов, т.е. по дороге в эту же ступеньку все остальные ступеньки пройдены не более чем по одному разу. Далее рассмотрим этот маршрут.
Если на этом маршруте математик сделал k шагов вверх (каждый – на a ступенек) и l шагов вниз (каждый – на b ступенек), то $ka = lb$, поскольку он вернулся на прежнее место. Но $(a, b) = 1$, поэтому $k \geq b$, $l \geq a$ – значит, было совершено $k + l \geq a + b$ шагов. С другой стороны, количество шагов не больше общего числа ступенек (считая нулевую), поскольку на каждую из них математик наступили не более одного раза. Значит, $n + 1 \geq k + l \geq a + b$, откуда $n \geq a + b - 1$.
Теперь докажем, что при $n = a + b - 1$ можно подняться на верхнюю ступеньку и вернуться на землю. Заметим, что на какой бы ступеньке математик не стоял, у него всегда есть возможность сделать шаг (например, со ступеньки с номером от 0 до $b - 1$ – вверх на a ступенек, а со ступеньки с номером от b до $a + b - 1$ – вниз на b ступенек).
Рассмотрим диофантово уравнение $ax - by = 1$. Поскольку $(a, b) = 1$, у этого уравнения есть

решение (x_0, y_0), где $0 \leq x_0 \leq b-1$, $0 \leq y_0 \leq a-1$.
Вот как должен идти математик: сначала вверх на x_0 шагов, либо пока не сможет идти дальше. После этого вниз на y_0 шагов, либо пока не сможет идти дальше, и т.д., пока не сделает совокупно x_0 шагов вверх и y_0 шагов вниз – так он сдвинется на одну ступеньку вверх. Продолжая так действовать, он поднимется на верхнюю ступеньку.
Чтобы спуститься, возьмем уравнение $bu - av = 1$ и аналогично воспользуемся его решением для построения маршрута обратно к нулевой ступеньке.

Solution (ENG). We can assume that $(a, b) = 1$ by dividing a, b, n by (a, b) if necessary. Note, that if n is not divisible by (a, b), then it is impossible to move from the zero stair to the top one, because after each step the mathematician will find himself on a stair with a number being a multiple of (a, b).
First we prove that $n \geq a + b - 1$. Let the mathematician manage to move to the top stair and return to the ground, then there is a stair that he visited twice (in particular, the stair with number 0), i.e. he made a cycle. Among all such stairs we choose the one in whose cycle there are no other cycles, i.e. on the way to the same stair all other stairs are stepped at most once. Next, consider this route.
If on this route the mathematician took k stairs up (each by a steps) and l stairs down (each by b steps), then $ka = lb$, since he returned back. But $(a, b) = 1$, so $k \geq b$, $l \geq a$ – means $k + l \geq a + b$ steps have been taken. On the other hand, the number of steps is at most the total number of stairs (counting the zero stair), since each of them was stepped on by the mathematician at most once. Thus, $n + 1 \geq k + l \geq a + b$ which leads to $n \geq a + b - 1$.
Now let's prove that for $n = a + b - 1$ you can climb the top stair and return to the ground. Note, that no matter what stair a mathematician is on, he always has the opportunity to take a step (for example, from a stair with a number from 0 to $b - 1$ he can move by a stairs up, and from a stair with a number from b to $a + b - 1$ the mathematician can move by b steps down).
Consider the Diophantine equation $ax - by = 1$. Since $(a, b) = 1$, the equation has a solution (x_0, y_0) with $0 \leq x_0 \leq b - 1$, $0 \leq y_0 \leq a - 1$.
This is how the mathematician should go: first he goes up x_0 steps, or until he can go no further. After that, he goes down y_0 steps, or until he can go no further, etc., until he takes a total of x_0 steps up and y_0 steps down – by that he moves one stair up. By continuing to do so, he will move to the top step.
To move down to the zero stair, we take the equation $bu - av = 1$ and use its solution to build a route.

8-9 degree

Task 1. В городе 50 киберспортивных клубов и N киберспортсменов, причем каждый киберспортсмен посещает 1 или 2 клуба. В каждом клубе не более 55 участников, и для любых двух клубов найдется киберспортсмен, который посещает оба. Найдите все возможные значения N.

There are 50 e-sports clubs and N e-sportsmen in the city, and each e-sportsman attends 1 or 2 of the clubs. Each club has no more than 55 of participants, and for any two clubs there is an e-sportsman who attends both. Find all possible values of N.

Решение (RUS). Количество пар клубов равно $\binom{50}{2} = \frac{50 \cdot 49}{2} = 25 \cdot 49 = 1225$. Это минимальное количество киберспортсменов, которые могут жить в городе, т.к. спортсмен, посещающий одну пару клубов, уже не может посещать другую, иначе он посещает не менее 3-х клубов, что противоречит условию.
Помимо этих игроков могут быть и те, которые посещают только один клуб, и в каждом клубе таких может быть не более 6-и (т.к. 49 киберспортсменов уже посещают этот клуб в паре с каким-то еще). При этом любое количество от 0 до 6 таких игроков для любого из клубов возможно.
Таким образом, в этом городе может быть любое количество киберспортсменов от 1225 до
$1225 + 50 \cdot 6 = 1525$.

Ответ. От 1225 до 1525.

Solution (ENG). The number of pairs of the clubs is $\binom{50}{2} = \frac{50 \cdot 49}{2} = 25 \cdot 49 = 1225$. This is the minimum number of e-sports players who can live in the city, because an e-sports player visiting one pair of clubs can no longer visit another, otherwise he visits at least 3 clubs, which contradicts initial conditions.
In addition to these players, there may be those who visit only one club, and in each club there can be no more than 6 of them (because 49 e-sportsmen already visit this club in a pair with some other). Moreover, any number of such players from 0 to 6 is possible for any of the clubs.
Thus, there can be any number of e-sportsmen in the city from 1225 to
$1225 + 50 \cdot 6 = 1525$.

Answer. From 1225 to 1525.

Task 2. *(Задача предоставлена партнером олимпиады – компанией «Тинькофф»)*
Точка M – середина стороны AB треугольника ABC. Точка K выбирается на отрезке AB так, что $\angle BCK = \angle ACM$. Точки P и Q на сторонах BC и AC таковы, что $KP \parallel AC$ и $KQ \parallel BC$. Докажите, что четырехугольник $BPQA$ – вписанный.

Point M is the midpoint of side AB of a triangle ABC. The point K is chosen on the segment AB in such way that $\angle BCK = \angle ACM$. Points P and Q on sides BC and AC are such that $KP \parallel AC$ and $KQ \parallel BC$. Prove that quadrilateral $BPQA$ can be inscribed in a circle.

Решение (RUS). Пусть точка $Q' \neq A$ – пересечение окружности, описанной около треугольника BPA, с прямой AC; точка N – середина отрезка PQ'. Докажем, что точки Q и Q' совпадают. Треугольники BCA и $Q'CP$ подобны (именно в таком порядке вершин), поэтому их медианы CM и CN образуют равные углы с соответствующими сторонами треугольников, следовательно, $\angle PCN = \angle ACM$, откуда заключаем, что точки C, N, K лежат на одной прямой. Треугольники PNK и $Q'NC$ равны, поэтому четырехугольник $PCQ'K$ – параллелограмм, поэтому $Q' = Q$ и четырехугольник $BPQA$ – вписанный, что и требовалось доказать.

Solution (ENG). Let the point $Q' \neq A$ be the point of intersection of the circumcircle of the triangle BPA with the line AC; the point N is the midpoint of the segment PQ'. Lets prove that the points Q and Q' coincide.

Triangles BCA and $Q'CP$ are similar (exactly in this order of vertices), so their medians CM and CN make equal angles with the corresponding sides of the triangles, hence $\angle PCN = \angle ACM$, whence we conclude that the points C, N, K lie on a line. Triangles PNK and $Q'NC$ are equal, so quadrilateral $PCQ'K$ is a parallelogram, thus $Q' = Q$ and quadrilateral $BPQA$ is an inscribed one, which was to be proved.

Task 3. Найдите все функции $f(x)$, которые при любых $x \in (-\infty; 0) \cup (0; 1) \cup (1; +\infty)$ удовлетворяют равенству

$$f(x) + f\Big(\frac{1}{1-x}\Big) = x$$

Find all functions $f(x)$ that for any $x \in (-\infty; 0) \cup (0; 1) \cup (1; +\infty)$ satisfy

$$f(x) + f\Big(\frac{1}{1-x}\Big) = x$$

Решение (RUS). Подставив в исходное уравнение $\frac{1}{1-x}$ вместо x, получим для $f(x)$ и всех $x \in (-\infty; 0) \cup (0; 1) \cup (1; +\infty)$ равенство $f\left(\frac{1}{1-x}\right) + f\left(\frac{x-1}{x}\right) = \frac{1}{1-x}$. Подставляя в последнее равенство $\frac{1}{1-x}$ вместо x, получим равенство $f\left(\frac{x-1}{x}\right) + f(x) = \frac{x-1}{x}$, определенное для тех же x. Итак, исходное уравнение равносильно системе

$$\begin{cases} f(x) + f\left(\frac{1}{1-x}\right) = x \\ f\left(\frac{1}{1-x}\right) + f\left(\frac{x-1}{x}\right) = \frac{1}{1-x} \\ f\left(\frac{x-1}{x}\right) + f(x) = \frac{x-1}{x} \end{cases}$$

Сложив первое равенство с третьим, затем вычтя второе и разделив полученное равенство на 2, получим $f(x) = \frac{x^3-x+1}{2(x^2-x)}$. Непосредственной проверкой можно убедиться, что найденная функция удовлетворяет исходному равенству.

Ответ. $f(x) = \frac{x^3-x+1}{2(x^2-x)}$

Solution (ENG). Substituting $\frac{1}{1-x}$ instead of x into the original equation, we obtain an equality $f\left(\frac{1}{1-x}\right) + f\left(\frac{x-1}{x}\right) = \frac{1}{1-x}$ for $f(x)$ and all $x \in (-\infty; 0) \cup (0; 1) \cup (1; +\infty)$. Substituting $\frac{1}{1-x}$ instead of x into the last equality, we obtain $f\left(\frac{x-1}{x}\right) + f(x) = \frac{x-1}{x}$ for the same x. So, the original equation is equivalent to the system

$$\begin{cases} f(x) + f\left(\frac{1}{1-x}\right) = x \\ f\left(\frac{1}{1-x}\right) + f\left(\frac{x-1}{x}\right) = \frac{1}{1-x} \\ f\left(\frac{x-1}{x}\right) + f(x) = \frac{x-1}{x} \end{cases}$$

By adding the first equality to the third one, then subtracting the second one and dividing the resulting equality by 2, we get $f(x) = \frac{x^3-x+1}{2(x^2-x)}$. We can make sure that the function satisfies the initial equality by checking it directly.

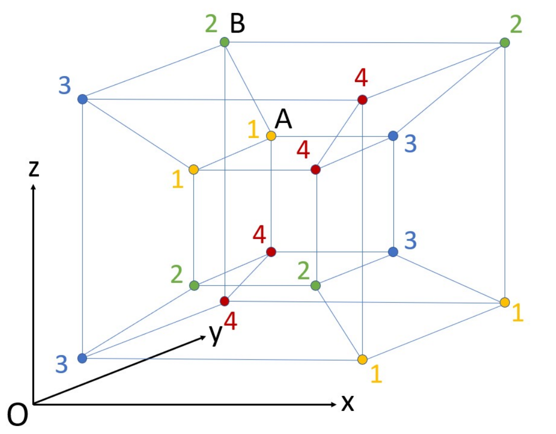
Answer. $f(x) = \frac{x^3-x+1}{2(x^2-x)}$

Task 4. Султан поймал двоих математиков и сказал им:
«Завтра в каждом из четырех углов этого зала я поставлю по сундуку, на каждом из которых будет написано какое-то целое число, и первый из вас будет тому свидетелем. На его глазах в один из этих сундуков я положу ключ от вашей тюрьмы, и первый из вас должен будет увеличить на единицу число, написанное на одном из сундуков по его выбору.
Затем я уведу этого человека и, не двигая сундуки, приведу второго, и он должен будет с первой попытки угадать, в каком сундуке ключ. Если угадает – вы оба свободны, если же он не справится – значит, оба останетесь в моей тюрьме навсегда. А пока идите в свою камеру и думайте, можете ли спастись».

Как должны действовать математики, чтобы гарантированно спастись? Учтите, что завтра у них не будет возможности переговариваться друг с другом.

Sultan caught two mathematicians and told them:
«Tomorrow I will place a chest in each of the four corners of this hall. On each of the chests some integer will be written, and the first of you will be a witness to this. Before his eyes I will place the key to your prison in one of these chests. The first of you will have to increase by 1 the number written on one of the chests of his choice.
Then I will take the first of you away and I will bring the second of you without moving the chests, and the second of you will have to guess (with the first attempt) which chest the key is in. If he guesses correctly, you are both free, but if he fails, then both of you will remain in my prison forever. Now go to your cell and think how you can escape».
How should mathematicians proceed in order to be guaranteed to get free? Keep in mind that tomorrow they will not have the opportunity to talk to each other.

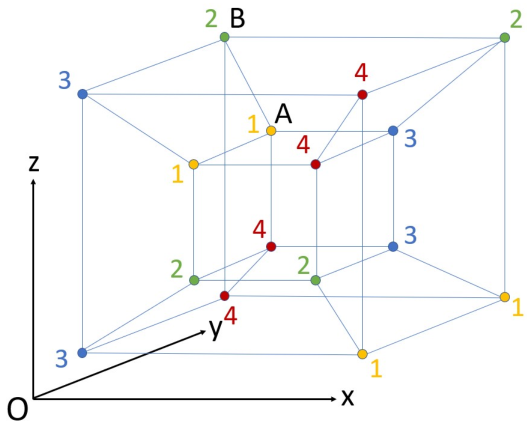
Решение (RUS). Опишем один из алгоритмов, согласно которому должны действовать математики, чтобы спастись.
Предварительно (в ночь перед угадыванием сундука) математики договариваются о том, в каком порядке нумеровать сундуки (например, по часовой стрелке, начиная от сундука в ближнем левом углу зала), т.е. устанавливают взаимооднозначное соответствие между сундуками и числами 1,2,3,4.
На следующий день первый математик, узнавший, в каком сундуке ключ, и видящий все числа на сундуках, берет их остатки при делении на 2. Он должен увеличить одно из чисел, написанных на сундуках, на единицу (тем самым изменив его остаток при делении на 2: 0 на 1 , а 1 – на 0), а второй математик по четности четырех чисел на сундуках должен определить, в каком сундуке ключ.
Далее будем вместо четных чисел писать 0, а вместо нечетных – 1; всего существует 16 четверок (x, y, z, t), где $x, y, z, t \in \{0; 1\}$. Каждой четверке целых чисел, написанных на сундуках, соответствует одна из упомянутых 16-и четверок (x, y, z, t), причем после прибавления единицы к одному из чисел на сундуках мы получаем другую четверку. Изобразим эти четверки в виде вершин четырехмерного куба, переход по любому ребру которого соответствует прибавлению единицы к одному из чисел на сундуках (переход по первой координате соответствует движению по ребру, параллельному оси Ox, по второй координате – Oy, по третьей – Oz, по четвертой – переход между «внешним» и «внутренним» кубами):



Каждой вершине куба соответствует число от 1 до 4 – номер сундука, который таким образом узнает второй математик, что позволит обоим спастись. Заметим, что из любой вершины можно пройти по одному из ребер так, чтобы оказаться в вершине с любым числом от 1 до 4, что позволяет первому математику «зашифровать» номер любого сундука.
Вот пример того, как это может произойти: пусть султан написал на сундуках числа -120, 43, 9779, -630081. Первый математик берет остатки при делении этих чисел на 2 и получает четверку

$(0,1,1,1)$, которая соответствует вершине A гиперкуба (см. рис.). Далее султан кладет ключ в один из этих сундуков – например, во 2-й. Тогда первый математик «проходит» по ребру AB куба, т.е. прибавляет единицу к числу -630081 (соответствующего переходу по 4-й координате, поскольку вершине B соответствует четверка $(0,1,1,0)$, отличающаяся от $A(0,1,1,1)$ только 4-й координатой). После этого второй математик видит числа -120, 43, 9779, -630080, которым соответствует четверка $(0,1,1,0)$, которой соответствует вершина B, которой, в свою очередь, соответствует число 2 (о соответствии номеров сундуков и вершин гиперкуба математики тоже договариваются заранее). Так второй математик понимает, что ключ находится во 2-м сундуке, и указывает на него.

Solution (ENG). Lets describe one of the ways for mathematicians to get free.
Previously (on the night before guessing the chest), mathematicians discuss the order which to number the chests in (for example, clockwise, starting from the chest in the near left corner of the hall), i.e. establish a one-to-one correspondence between chests and numbers 1,2,3,4.
The next day, the first mathematician who knows which chest contains the key and sees all the integers on the chests takes their remainders when divided by 2. He must increase one of the integers by 1 (thus changing its remainder when divided by 2: 0 to 1, and 1 to 0), and the second mathematician must determine which chest contains the key by the evenness of the four numbers on the chests.
Further, we'll write 0 instead of even numbers, and 1 instead of odd numbers; there are 16 quadruples (x,y,z,t), where $x,y,z,t \in \{0;1\}$. Each quadruple of integers written on the chests corresponds to one of the mentioned 16 quadruples (x,y,z,t), and after adding 1 to one of the numbers on the chests we get another quadruple. Let's depict these quadruples as vertices of a four-dimensional cube. Transition along any edge of the hypercube corresponds to adding 1 to one of the numbers on the chests (the transition along the first coordinate corresponds to the movement along the edge parallel to the Ox axis, along the second coordinate – Oy, along the third – Oz, along the fourth – the transition between «outer» and «inner» cubes):



Each vertex of the hypercube corresponds to an integer from 1 to 4 – the number of the chest, which the second mathematician will thus recognize, and that will allow both to escape. Note, that from any vertex we can go along one of the edges to end up at a vertex with any number from 1 to 4, which allows the first mathematician to «encrypt» the number of any chest.
Here is an example of how this can happen: let the sultan write the numbers -120, 43, 9779, -630081 on the chests. The first mathematician takes the remainders when dividing these numbers by 2 and gets the quadruple $(0,1,1,1)$, which corresponds to the vertex A of the hypercube (see the picture above). Next, the sultan puts the key in one of these chests – for example, in the 2-nd one. Then the first mathematician «goes» along the edge AB of the hypercube, i.e. adds 1 to the number -630081 (corresponding to the transition along the 4-th coordinate, since the vertex B corresponds to the quadruple $(0,1,1,0)$, which differs from $A(0,1,1,1)$ only the 4-th coordinate). After that, the second mathematician sees the numbers -120, 43, 9779, -630080, which correspond to the quadruple $(0,1,1,0)$, which corresponds to the vertex B, which, in turn, corresponds to the number 2 (about the correspondence between the numbers of chests and vertices of the hypercube mathematicians also agree in advance). Thus, the second mathematician understands that the key is in the 2-nd chest, and points to it.

Task 5. Параболы, заданные уравнениями $y = x^2 - a$ и $x = y^2 - b$, пересекаются в четырех различных точках $P_i(x_i, y_i)$, где $i = 1, 2, 3, 4$. Вычислите значение выражения

$$(x_1 + x_2)(x_1 + x_3)(x_1 + x_4)$$

The parabolas defined by the equations $y = x^2 - a$ and $x = y^2 - b$ intersect at four distinct points $P_i(x_i, y_i)$ for $i = 1, 2, 3, 4$. Calculate the value of the expression

$$(x_1 + x_2)(x_1 + x_3)(x_1 + x_4)$$

Решение (RUS). Заметим, что числа x_1, x_2, x_3, x_4 являются корнями многочлена $f(x) = (x^2 - a)^2 - b - x$. Перепишем этот многочлен в виде $f(x) = x^4 - 2ax^2 - x + a^2 - b$.
Если $x_1 = 0$, то x_2, x_3, x_4 – корни многочлена $f_1(x) = \frac{f(x)}{x} = x^3 - 2ax - 1$, и по теореме Виета имеем

$$(x_1 + x_2)(x_1 + x_3)(x_1 + x_4) = x_2 x_3 x_4 = 1$$

Если же $x_1 \neq 0$, то

$$(x_1 + x_2)(x_1 + x_3)(x_1 + x_4) = \frac{(x_1 + x_1)(x_1 + x_2)(x_1 + x_3)(x_1 + x_4)}{x_1 + x_1} = \frac{f(-x_1)}{2x_1} = \frac{f(x_1) + 2x_1}{2x_1} = 1$$

Итак, в обоих случаях $(x_1 + x_2)(x_1 + x_3)(x_1 + x_4) = 1$.

Ответ. 1

Solution (ENG). Note, that the numbers x_1, x_2, x_3, x_4 are the roots of the polynomial $f(x) = (x^2 - a)^2 - b - x$. Lets rewrite this polynomial in the following form: $f(x) = x^4 - 2ax^2 - x + a^2 - b$.
If $x_1 = 0$, then x_2, x_3, x_4 are the roots of the polynomial $f_1(x) = \frac{f(x)}{x} = x^3 - 2ax - 1$, and by Vieta's formula we have

$$(x_1 + x_2)(x_1 + x_3)(x_1 + x_4) = x_2 x_3 x_4 = 1$$

If $x_1 \neq 0$, then

$$(x_1 + x_2)(x_1 + x_3)(x_1 + x_4) = \frac{(x_1 + x_1)(x_1 + x_2)(x_1 + x_3)(x_1 + x_4)}{x_1 + x_1} = \frac{f(-x_1)}{2x_1} = \frac{f(x_1) + 2x_1}{2x_1} = 1$$

Thus, in both cases $(x_1 + x_2)(x_1 + x_3)(x_1 + x_4) = 1$.

Answer. 1

10-12 degree

Task 1. Все марсиане делятся на одноглазых, двуглазых и трехглазых. Марсианин отдыхает только тогда, когда закрыт хотя бы один его глаз, причем каждую секунду каждый глаз может быть открыт с вероятностью 0.5 независимо от остальных.
Известно, что среди всех марсиан, у которых не меньше двух глаз, каждую секунду в среднем 80% отдыхают, а среди тех, у которых не больше двух глаз, каждую секунду отдыхают в среднем $\frac{2}{3}$ марсиан. Найдите долю двуглазых марсиан среди всех марсиан.

Every Martian has either one, two or three eyes. A Martian rests only when at least one of his eyes is closed, and every second each eye can be open with a probability of 0.5, regardless of the other eyes. It is known that among all Martians who have at least two eyes, on average 80% rest at any given second, and among those who have no more than two eyes, on average $\frac{2}{3}$ Martians rest at any given second. Find the proportion of two-eyed Martians among all Martians.

Решение (RUS). Пусть n_k – количество марсиан, у которых k глаз ($k = 1, 2, 3$). Такой марсианин каждую секунду отдыхает с вероятностью $1 - 0.5^k$, поскольку события «марсианин отдыхает» и «все глаза марсианина открыты» образуют полную группу событий, поэтому сумма их вероятностей равна 1. Сначала рассмотрим случай, когда $n_2 \neq 0$.
Тогда вероятность того, что наугад выбранный марсианин, у которого не больше двух глаз, отдыхает, равна $\frac{2}{3} = \frac{(1-0.5)n_1+(1-0.5^2)n_2}{n_1+n_2} = 1 - 0.5 \cdot \frac{n_1+0.5n_2}{n_1+n_2}$. Аналогичная вероятность для марсиан, у которых не меньше двух глаз, равна $0.8 = \frac{(1-0.5^2)n_2+(1-0.5^3)n_3}{n_2+n_3} = 1 - 0.25 \cdot \frac{n_2+0.5n_3}{n_2+n_3}$. Разделим числители и знаменатели полученных дробей на $n_2 \neq 0$ и обозначим $x = \frac{n_1}{n_2}, y = \frac{n_3}{n_2}$ (тогда искомое отношение $\frac{n_2}{n_1+n_2+n_3}$ преобразуется к виду $\frac{1}{x+y+1}$). Получим систему уравнений

$$\begin{cases} 0.5x + 0.25 = \frac{1}{3}(x+1) \\ 0.125y + 0.25 = 0.2(y+1) \end{cases},$$

откуда $x = 0.5$, $y = \frac{2}{3}$ и $\frac{1}{x+y+1} = \frac{6}{13}$.
Теперь рассмотрим случай, когда $n_2 = 0$. Тогда доля отдыхающих марсиан среди тех, у кого не больше двух глаз, должна быть равна доле отдыхающих одноглазых марсиан, т.е. 0.5. Однако, согласно условию, эта доля равна $\frac{2}{3} \neq 0.5$ – получили противоречие, значит, $n_2 \neq 0$.

Ответ. $\frac{6}{13}$

Solution (ENG). Let n_k be the number of Martians who have k eyes ($k = 1, 2, 3$). Such a Martian has a rest at each second with a probability of $1 - 0.5^k$, since the events «Martian is resting» and «all Martian's eyes are open» form a complete group of events, so the sum of their probabilities is 1. First let's consider the case when $n_2 \neq 0$.
Then the probability that a randomly selected Martian with no more than two eyes rests is $\frac{2}{3} = \frac{(1-0.5)n_1+(1-0.5^2)n_2}{n_1+n_2} = 1 - 0.5 \cdot \frac{n_1+0.5n_2}{n_1+n_2}$. A similar probability for Martians with at least two eyes is $0.8 = \frac{(1-0.5^2)n_2+(1-0.5^3)n_3}{n_2+n_3} = 1 - 0.25 \cdot \frac{n_2+0.5n_3}{n_2+n_3}$. Lets divide the numerators and denominators of the resulting fractions by $n_2 \neq 0$ and denote $x = \frac{n_1}{n_2}, y = \frac{n_3}{n_2}$ (then the required ratio $\frac{n_2}{n_1+n_2+n_3}$ is being noted as $\frac{1}{x+y+1}$). We get a system of equations

$$\begin{cases} 0.5x + 0.25 = \frac{1}{3}(x+1) \\ 0.125y + 0.25 = 0.2(y+1) \end{cases},$$

thus $x = 0.5$, $y = \frac{2}{3}$ and $\frac{1}{x+y+1} = \frac{6}{13}$.
Now let's consider the case when $n_2 = 0$. Then the ratio of resting Martians among those who have no more than two eyes ($\frac{2}{3}$) should be equal to the ratio of resting one-eyed Martians (0.5). They are not equal and by that we get a contradiction, thus $n_2 \neq 0$.

Answer. $\frac{6}{13}$

Task 2. Проводится шахматный турнир, в котором участвуют n человек ($n > 2$). Из-за эпидемической обстановки партии проходят в отдельных помещениях, причем в каждом помещении шахматист может играть только фигурами одного цвета.
Например, если Иван играл черными фигурами в помещении №1, то он уже не сможет сыграть белыми фигурами в этом помещении. Аналогично, если участник играл белыми фигурами в помещении №5, то в этом же помещении он уже не сможет играть черными фигурами. При этом он может снова играть белыми фигурами в помещении №5.
Известно, что каждый участник турнира должен сыграть с любым другим участником ровно одну партию. Организаторы хотят составить такое расписание, чтобы задействовать минимально возможное число помещений. Докажите, что это число равно $[\log_2 n] + 1$.
Здесь $[x]$ – целая часть числа x, т.е. наибольшее целое число, не превосходящее x.

A chess tournament is being held with n participants ($n > 2$). Due to the epidemic situation, the tournament's games are played in separate rooms, and in each room a chess player can only play pieces of the same color.
For example, if Ivan played with black pieces in room number 1, then he will no longer be able to play with white pieces in this room. Similarly, if a participant played with white pieces in room number 5, then he will no longer be able to play with black pieces in the room, but he can play another game with white pieces in this room.
It is known that each participant of the tournament must play exactly one game with any other participant. The organizers of the tournament want to make such a schedule to use the smallest possible number of rooms. Prove that the number is equal to $[\log_2 n] + 1$.
Here $[x]$ is a floor function of x, i.e. greatest integer less than or equal to x.

Решение (RUS). Утверждение, которое требуется доказать, неверно: на самом деле искомое число равно $\lceil \log_2 n \rceil$, что при $n = 2^k$ (для натуральных $k > 1$) отличается от заявленного в условии. Участники были предупреждены об этой ошибке, и от них требовалось найти минимальное число помещений для каждого $n > 2$.
Пусть $f(n)$ – искомое число помещении в зависимости от количества n участников турнира. Сначала докажем индукцией по $\lceil \log_2 n \rceil$, что $f(n) \geq \lceil \log_2 n \rceil$ (здесь $\lceil x \rceil$ – функция взятия целой части числа с округлением «вверх»). База (для $n = 3$ и $n = 4$) очевидна.
Зафиксируем помещение (например, №1) и обозначим через U_1 множество шахматистов (вершин графа, каждое ребро которого соответствует определенной партии), которые играли в этом помещении белыми фигурами. Аналогично, обозначим за U_2 множество шахматистов, которые НЕ играли в этом помещении белыми фигурами. Множества U_1 и U_2 не пересекаются – значит, хотя бы одно из них (без ограничения общности будем считать, что это U_1) содержит не более $n/2$ элементов, остальные шахматисты (их не менее $n/2$) не играли белыми фигурами в помещении №1 – значит, им для этого хватило $f(n) - 1$ помещений: $f(n) - 1 \geq f(\lceil n/2 \rceil) \geq \lceil \log_2(\lceil n/2 \rceil) \rceil$, откуда $f(n) \geq \lceil \log_2 n \rceil$.
Покажем, как сделать «правильное» (т.е. соответствующее условию задачи) расписание с $f(n) = \lceil \log_2 n \rceil$. Для этого занумеруем вершины графа (т.е. шахматистов) числами от 0 до $n - 1$ и ориентируем ребра графа (т.е. партии) ij, если $i > j$ (шахматист i играет белыми, а j – черными), а помещения занумеруем числами от 0 до $\lceil \log_2 n \rceil$. Ребру ij поставим в соответствие номер k, который определяется как наибольшее k, такое, что в двоичной записи числа i на k-м месте стоит 1, а у числа j – 0. Такое k существует, поскольку $i \neq j$. Кроме того, в двоичных разложениях i, j не более $\lceil \log_2 n \rceil$ цифр, откуда $k \leq \lceil \log_2 n \rceil$.
Осталось проверить, что ребрам ij и jl соответствуют разные номера. Действительно, если бы им соответствовал общий номер k, то у числа j в k-м разряде двоичной записи стояла бы и цифра 0 (из-за ребра ij), и цифра 1 (из-за ребра jl), что невозможно.

Solution (ENG). The statement to be proven is false: in fact, the required number is equal to $\lceil \log_2 n \rceil$, which for $n = 2^k$ (for positive integers $k > 1$) differs from the one declared in the task formulation. Participants were warned about this error and were required to find the minimum number of rooms for each $n > 2$.
Let $f(n)$ be the desired number of rooms depending on the number n of participants of the tournament. First we prove by induction on $\lceil \log_2 n \rceil$ that $f(n) \geq \lceil \log_2 n \rceil$ ($\lceil x \rceil$ is a ceil function of x). The base (for $n = 3$ and $n = 4$) is obvious.
We fix a room (for example, room number 1) and denote by U_1 the set of chess players (the vertices of the graph, each edge of which corresponds to a certain game) who played in this room with white pieces. Let U_2 denote the set of chess players who did NOT play in this room with white pieces. According to the initial condition, the sets U_1 and U_2 do not intersect, which means that at least one of them (without loss of generality we will assume that this is U_1) contains no more than $n/2$ elements, and the rest of participants (there are no less than $n/2$) didn't play with white pieces in room 1 – it means that $f(n) - 1$ of rooms were enough for them: $f(n) - 1 \geq f(\lceil n/2 \rceil) \geq \lceil \log_2(\lceil n/2 \rceil) \rceil$, thus $f(n) \geq \lceil \log_2 n \rceil$.
Lets show how to make a «correct» (that is, satisfying conditions of the task) schedule with $f(n) = \lceil \log_2 n \rceil$. To do that, we enumerate the vertices of the graph (i.e. chess players) with numbers from 0 to $n - 1$ and orient the edges of the graph (i.e. games) ij if $i > j$ (chess player i plays with white pieces, and the one with number j plays with black pieces), and enumerate the rooms with numbers from 0 to $\lceil \log_2 n \rceil$. We associate the edge ij with a number k which is defined as the largest k, such that the number i has 1 in the k-th place of its binary notation, and the number j has 0 in the same place of its binary notation. Such k exists because $i \neq j$. Moreover, the binary notations of i, j have at most $\lceil \log_2 n \rceil$ digits, thus $k \leq \lceil \log_2 n \rceil$.
It remains to verify that the edges ij and jl correspond to different numbers. Indeed, if they had a common number k, then j would have both the digit 0 (because of the edge ij) and the number 1 (because of the edge jl) at the same place of its binary notation, but that is impossible.

Task 3. Два игрока играют в игру: они по очереди вытаскивают камни из кучки, в которой изначально было n камней. В свой первый ход первый игрок берет из кучи один или несколько камней, но не может забрать все камни. Каждым следующим ходом очередной игрок должен забрать из кучи количество камней, являющееся делителем числа камней, забранного противником на предыдущем ходу, и не превосходящее числа камней в куче. Выигрывает тот, кто заберет последний камень. Для каждого $n > 1$ определите, у кого из соперников есть выигрышная стратегия.

Two players play a game: they take turns picking stones from a pile that originally contained n stones. On his first turn the first player takes one or more stones from the pile, but cannot take all of the stones. On each next move a player must take the number of stones from the pile, which is a divisor of the number of stones taken by the opponent on the previous move, and does not exceed the number of stones in the pile. The one who takes the last stone wins the game. Determine for each $n > 1$ which of the opponents has a winning strategy.

Решение (RUS). Заметим, что если в куче нечетное число камней, то первый игрок гарантирует себе победу, взяв на первом ходу 1 камень: тогда каждым следующим ходом игроки будут забирать по одному камню, и последний камень заберет первый игрок. Когда n чётно, тот, кто первым сделает нечетный шаг, проиграет: такой шаг был сделан из четного числа – значит, он не будет последним, а противник заберет один камень, что и обеспечит ему победу.
Если $n = 2$, то второй игрок, очевидно, побеждает. Если $n = 3$, то побеждает первый игрок, забирая первым ходом 1 камень. Если $n = 4$, то побеждает второй игрок: если первый берет 1 камень, то второй возьмет последний камень, а если первый игрок первым ходом берет 2 или 3 камня, то второй игрок первым своим ходом забирает остальные камни.
Докажем по индукции, что для всех четных n от $2^{k-1} + 1$ до $2^k - 1$ (для натурального $k \geq 2$) побеждает первый игрок, а для $n = 2^k$ – второй. База индукции ($k = 2$) разобрана выше.
Пусть $2^{k-1} + 1 \leq n \leq 2^k - 1$ для натурального $k \geq 3$. Тогда первый игрок сводит игру к таковой

с $n/2$ камнями (т.е. берет вдвое больше камней, чем взял бы в игре с $n/2$ камнями), где у него есть победная стратегия согласно предположению индукции, поскольку $2^{k-2}+1 \le n/2 \le 2^{k-1}-1$. Единственный способ помешать ему – взять нечетное число камней, но, как показано выше, тот, кто первым возьмет нечетное число камней, проигрывает.
Пусть теперь $n = 2^k$ для $k \ge 3$. Тогда уже второй игрок применяет стратегию «половинчатой» игры, т.е. берет в 2 раза больше камней, чем взял бы в игре с $n/2$ камнями. Согласно предположению индукции, это обеспечит ему победу.

Ответ. При $n = 2^k$ (для $k \in \mathbb{N}$) второй игрок может гарантировать себе победу. При прочих $n > 1$ выигрышная стратегия есть у первого игрока.

Solution (ENG). Note, that if there is an odd number of stones in the pile, then the first player guarantees himself a victory by taking 1 stone on the first move: then each next move the players will take 1 stone, and the last stone will be taken by the first player. When n is even, the first one to make an odd step will lose: such a step was made from an even number – so it will not be the last one, and the opponent will immediately take 1 stone, which will ensure his victory.
If $n = 2$, then the second player wins obviously. If $n = 3$, then the first player wins by taking 1 stone on the first move. If $n = 4$, then the second player wins: if the first player takes 1 stone, then the second player takes the last stone, and if the first player takes 2 or 3 stones on the first move, then the second player takes the remaining ones.
Lets prove by induction that for all even n from $2^{k-1}+1$ to 2^k-1 (while $k \ge 2$ is an integer) the first player wins, and for $n = 2^k$ so does the second player. The base of induction ($k = 2$) has been shown above.
Let $2^{k-1}+1 \le n \le 2^k-1$ for integer $k \ge 3$. Then the first player reduces the game to that with $n/2$ stones (i.e. he takes twice as many stones as he would take in the game with $n/2$ stones), where he has a winning strategy according to the induction hypothesis, since $2^{k-2}+1 \le n/2 \le 2^{k-1}-1$. The only way to stop him is to take an odd number of stones, but as shown above, whoever is the first to take an odd number of stones loses.
Let now $n = 2^k$ for $k \ge 3$. Then the second player applies his strategy of the game with $n/2$ stones, i.e. he takes 2 times more stones than he would take in the game with $n/2$ stones. According to the induction hypothesis, this will ensure his victory.

Answer. For $n = 2^k$ (for $k \in \mathbb{N}$) the second player can guarantee his victory. For other $n > 1$, the first player has a winning strategy.

Task 4. Назовем бесконечную числовую последовательность $\{a_n\}$ *стабилизирующейся*, если при некотором k_0 для всех $k \ge k_0$ выполнено $a_k = a_{k+1}$. Тогда k_0 назовем *временем стабилизации*, a_k (при $k \ge k_0$) – *стабильным значением*.
Пусть a, b – натуральные числа. Дана последовательность $\{x_n\}$, в которой $x_1 = x_2 = x_3 = a$ и для любого натурального n выполнены равенства $x_{3n+1} = b \cdot x_{3n-2}$, $x_{3n+2} = x_{3n-1} \circ b$ *(здесь $\circ b$ – это операция взятия целой части при делении на b)*, $x_{3n+3} = x_{3n} + x_{3n-2} \cdot \big(x_{3n-1} \pmod b\big)$ *(здесь $\pmod b$ – операция взятия остатка от деления на b)*.
Какие из последовательностей $\{x_{3n+1}\}$, $\{x_{3n+2}\}$, $\{x_{3n}\}$ ($n \in \mathbb{N}$) стабилизируются, и чему равны их стабильные значения? Чему равно время стабилизации последовательности $\{x_{3n}\}$?

We call an infinite number sequence $\{a_n\}$ *stabilizing* if $a_k = a_{k+1}$ for some k_0 and for all $k \ge k_0$. Then k_0 will be called *stabilization time*, and a_k (for $k \ge k_0$) will be called *stable value*.
Let a, b be positive integers. There is a sequence $\{x_n\}$ which has $x_1 = x_2 = x_3 = a$ and for any positive integer n it satisfies the equalities $x_{3n+1} = b \cdot x_{3n-2}$, $x_{3n+2} = x_{3n-1} \circ b$ *(here $\circ b$ is the operation of taking the whole part when dividing by b)*, $x_{3n+3} = x_{3n} + x_{3n-2} \cdot \big(x_{3n-1} \pmod b\big)$ *(here $\pmod b$ is the operation of taking the remainder of division by b)*.
Which of the sequences $\{x_{3n+1}\}$, $\{x_{3n+2}\}$, $\{x_{3n}\}$ ($n \in \mathbb{N}$) stabilizes, and what are their stable values? What is the stabilization time for the sequence $\{x_{3n}\}$?

Решение (RUS). Сначала рассмотрим последовательность $\{x_{3n+1}\}$. По ее определению имеем $x_{3n+1} = a \cdot b^n$ для всех целых $n \geq 0$ – значит, при $b = 1$ ее стабильное значение равно a, а при $b > 1$ она не стабилизируется.
Теперь рассмотрим $\{x_{3n+2}\}$. По определению, если $b = 1$, то $x_{3n+2} = a$ для всех целых $n \geq 0$, а если $b > 1$, то $x_{3n+2} \leq \frac{a}{b^n}$ и, поскольку последовательность – целочисленная, имеем $x_{3n+2} = 0$ для всех n, начиная с $\lceil \log_b a \rceil$ (целая часть от логарифма, взятая с избытком).
Докажем по индукции, что $x_{3n+1} \cdot x_{3n+2} + x_{3n+3} = a^2 + a$ для всех целых $n \geq 0$. База индукции ($n = 0$): $x_1 \cdot x_2 + x_3 = a^2 + a$ по определению. Индукционная гипотеза: пусть для некоторого $m \geq 0$ выполнено $x_{3m+1} \cdot x_{3m+2} + x_{3m+3} = a^2 + a$.
Тогда $x_{3(m+1)+1} \cdot x_{3(m+1)+2} + x_{3(m+1)+3} = (b \cdot x_{3m+1}) \cdot (x_{3m+2} \circ b) + \big(x_{3m+3} + x_{3m+1}(x_{3m+2} \pmod b)\big) = \big((b \cdot x_{3m+1}) \cdot (x_{3m+2} \circ b) + x_{3m+1}(x_{3m+2} \pmod b)\big) + x_{3m+3} = x_{3m+1} \cdot x_{3m+2} + x_{3m+3} = a^2 + a$, что и требовалось доказать.
Наконец, рассмотрим последовательность $\{x_{3n}\}$. В силу доказанного выше, если $b = 1$, то все члены последовательности $\{x_{3n}\}$ равны a, а если $b > 1$, то $x_{3n+3} = x_{3n+1} \cdot 0 + x_{3n+3} = x_{3n+1} \cdot x_{3n+2} + x_{3n+3} = a^2 + a$, начиная с $n = \lceil \log_b a \rceil$, следовательно, стабильное значение последовательности $\{x_{3n}\}$ равно $a^2 + a$.

Ответ. Последовательность $\{x_{3n+1}\}$ стабилизируется на a при $b = 1$;
$\{x_{3n+2}\}$ стабилизируется на a при $b = 1$ и на 0 при $b > 1$;
$\{x_{3n}\}$ стабилизируется на a при $b = 1$, начиная с $n = 1$, и на a^2+a при $b > 1$, начиная с $n = \lceil \log_b a \rceil$.

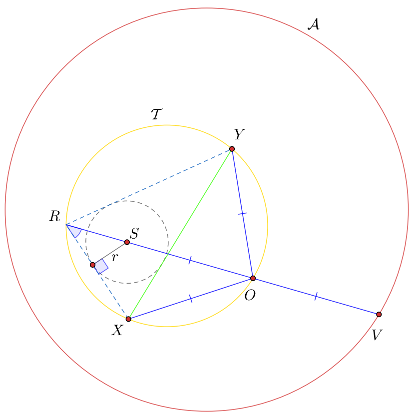
Solution (ENG). Lets consider the sequence $\{x_{3n+1}\}$. By its definition, we have $x_{3n+1} = a \cdot b^n$ for all integers $n \geq 0$ – thus, for $b = 1$ its stable value is equal to a, and for $b > 1$ the sequence does not stabilize.
Now lets consider $\{x_{3n+2}\}$. By its definition, if $b = 1$, then $x_{3n+2} = a$ for all integers $n \geq 0$, and if $b > 1$, then $x_{3n+2} \leq \frac{a}{b^n}$ and since the sequence is integer, we have $x_{3n+2} = 0$ for all n from $\lceil \log_b a \rceil$ (the ceil function of the logarithm).
Lets prove by induction that $x_{3n+1} \cdot x_{3n+2} + x_{3n+3} = a^2 + a$ for all integers $n \geq 0$. Base of induction ($n = 0$): $x_1 \cdot x_2 + x_3 = a^2 + a$ by definition. Induction hypothesis: let $x_{3m+1} \cdot x_{3m+2} + x_{3m+3} = a^2 + a$ hold for some $m \geq 0$.
Then $x_{3(m+1)+1} \cdot x_{3(m+1)+2} + x_{3(m+1)+3} = (b \cdot x_{3m+1}) \cdot (x_{3m+2} \circ b) + \big(x_{3m+3} + x_{3m+1}(x_{3m+2} \pmod b)\big) = \big((b \cdot x_{3m+1}) \cdot (x_{3m+2} \circ b) + x_{3m+1}(x_{3m+2} \pmod b)\big) + x_{3m+3} = x_{3m+1} \cdot x_{3m+2} + x_{3m+3} = a^2 + a$, which was to be proved.
Finally, we consider the sequence $\{x_{3n}\}$. By the statements proved above, if $b = 1$ then all members of the sequence $\{x_{3n}\}$ are equal to a, and if $b > 1$ then $x_{3n+3} = x_{3n+1} \cdot 0 + x_{3n+3} = x_{3n+1} \cdot x_{3n+2} + x_{3n+3} = a^2 + a$ from $n = \lceil \log_b a \rceil$, thus the stable value of the sequence $\{x_{3n}\}$ is $a^2 + a$.

Answer. The sequence $\{x_{3n+1}\}$ stabilizes on a for $b = 1$;
$\{x_{3n+2}\}$ stabilizes on a for $b = 1$ and on 0 for $b > 1$;
$\{x_{3n}\}$ stabilizes on a for $b = 1$ from $n = 1$, and on $a^2 + a$ for $b > 1$ from $n = \lceil \log_b a \rceil$.

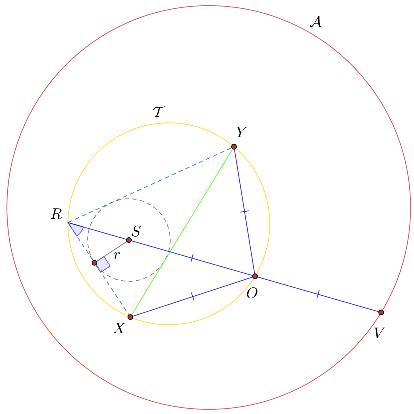
Task 5. *(Задача предоставлена партнером олимпиады – компанией «Тинькофф»)*
Олег и Оливер гоняют на велосипедах с одинаковыми угловыми скоростями: Оливер – по круговой траектории $\mathcal{A}$, а Олег – по круговой траектории $\mathcal{T}$ в два раза меньшего радиуса, причем они стартуют с двух ближайших точек окружностей и круг Олега лежит внутри круга Оливера. По окружности $\mathcal{T}$ также движутся два помощника, поддерживающих экран (т.е. хорду с концами в точках, в которых расположены помощники) так, что расстояние от каждого из них до Олега всегда такое же, как и расстояние от Олега до Оливера. Докажите, что на протяжении всей гонки экран касается некоторой фиксированной окружности.

Oleg and Oliver ride bicycles with the same angular speeds with Oliver riding along a circular path $\mathcal{A}$ and Oleg riding along a circular path $\mathcal{T}$ of half the radius of $\mathcal{A}$. They begin from the two closest points of the circles with Oleg's circle lying inside Oliver's circle. Two assistants also move along the circle $\mathcal{T}$ holding the screen (i.e., a chord with ends at the points where the assistants are located) such that the distance from each of the assistants to Oleg is always equal to distance from Oleg to Oliver. Prove that the screen touches some fixed circle throughout all the ride.

Решение (RUS). Обозначим за O, V, X и Y Олега, Оливера и двух помощников соответственно, за S – центр положительной гомотетии окружностей $\mathcal{T}$ и $\mathcal{A}$. Из условия следует, что прямая VO всегда проходит через S, причем, так как радиусы окружностей отличаются в два раза, отрезок SV делится точкой O пополам. Отметим точку $R \neq O$ – пересечение луча OS с $\mathcal{T}$. Поскольку равные хорды стягивают равные меньшие дуги, точка O — середина дуги XOY, то есть прямая RO содержит внутреннюю биссектрису треугольника XRY, а еще $OS = OV = OX = OY$. По лемме о трезубце это означает, что точка S является центром вписанной окружности треугольника XRY (обозначим эту окружность за ω).
Покажем, что ω является искомой окружностью. Она касается отрезка XY в силу построения, поэтому достаточно проверить, что она не зависит от времени. Как показано выше, центр ω – это S, обозначим ее радиус за r. Также обозначим за d расстояние между центрами ω и $\mathcal{T}$, а за R – постоянный радиус $\mathcal{T}$.
Посчитаем степень точки S относительно $\mathcal{T}$ двумя способами: $d^2 - r^2 = -RO \cdot SO = -RO \cdot OX = -RO \cdot 2R \sin \angle XRO = -2Rr$. Величины d и R не зависят от времени, поэтому r также от него не зависит, следовательно, окружность ω имеет постоянный центр и радиус, что и требовалось доказать.



Solution (ENG). Let O, V, X and Y denote Oleg, Oliver and two assistants, respectively, and S be the center of the positive homothety of $\mathcal{T}$ and $\mathcal{A}$. It follows from the condition that the line VO always passes through S, and the segment SV is bisected by the point O since radius of $\mathcal{A}$ is twice bigger than the radius of $\mathcal{T}$. Let the point $R \neq O$ be the intersection of the ray OS with $\mathcal{T}$. Since equal chords subtend equal smaller arcs, the point O is the midpoint of the arc XOY, thus the line RO contains the interior bisector of the triangle XRY, and also $OS = OV = OX = OY$. By the trillium theorem, this means that point S is the center of the inscribed circle of triangle XRY (we denote this circle by ω).
Lets show that ω is the circle required. It touches the segment XY by construction, so it is enough to check that it does not change with time. As shown above, the center of ω is S (let's denote its radius as r). We denote by d the distance between the centers ω and $\mathcal{T}$, and by R the radius $\mathcal{T}$ which does not depend on time.
We calculate the power of point S with respect to $\mathcal{T}$ in two ways: $d^2 - r^2 = -RO \cdot SO = -RO \cdot OX = -RO \cdot 2R \sin \angle XRO = -2Rr$. The values d and R do not depend on time, so r also does not depend on time, thus the circle ω has a constant center and radius, which was to be proved.


$\mathcal{A}$
$\mathcal{T}$
Y
R
S
r
O
X
V