Каждый участник получает комплект из 6 задач, при этом каждая из них случайным образом выбирается из 4-х вариантов.
Первые 4 задачи подразумевают краткий ответ в виде целого числа или десятичной дроби, округленной до сотых.
Задачи под номерами 5 и 6 требуют пошагового изложения рассуждений, которые приводят к ответу на вопрос задачи. Если на вопрос задачи 5 или 6 дан только краткий ответ, то ее решение оценивается в 0 баллов, даже если ответ верный.

7^{th} degree

Task 1.

1. Найти количество пар $(x; y)$ натуральных чисел, удовлетворяющих равенству

$$x + y = gcd(x, y) + 6$$

Здесь $gcd(x, y)$ – наибольший общий делитель x и y.
Если $x \neq y$, то пары $(x; y)$ и $(y; x)$ считаются различными.

Find the number of ordered pairs $(x; y)$ of positive integers satisfying

$$x + y = gcd(x, y) + 6$$

Here $gcd(x, y)$ is a greatest common divisor of x and y.
If $x \neq y$ then pairs $(x; y)$ and $(y; x)$ are considered to be different.

Answer: 11

2. Найти количество пар $(x; y)$ натуральных чисел, удовлетворяющих равенству

$$x + y = gcd(x, y) + 8$$

Здесь $gcd(x, y)$ – наибольший общий делитель x и y.
Если $x \neq y$, то пары $(x; y)$ и $(y; x)$ считаются различными.

Find the number of ordered pairs $(x; y)$ of positive integers satisfying

$$x + y = gcd(x, y) + 8$$

Here $gcd(x, y)$ is a greatest common divisor of x and y.
If $x \neq y$ then pairs $(x; y)$ and $(y; x)$ are considered to be different.

Answer: 13

3. Найти количество пар $(x; y)$ натуральных чисел, удовлетворяющих равенству

$$x + y = gcd(x, y) + 10$$

Здесь $gcd(x, y)$ – наибольший общий делитель x и y.
Если $x \neq y$, то пары $(x; y)$ и $(y; x)$ считаются различными.

Find the number of ordered pairs $(x; y)$ of positive integers satisfying

$$x + y = gcd(x, y) + 10$$

Here $gcd(x, y)$ is a greatest common divisor of x and y.
If $x \neq y$ then pairs $(x; y)$ and $(y; x)$ are considered to be different.

Answer: 15

4. Найти количество пар $(x; y)$ натуральных чисел, удовлетворяющих равенству

$$x + y = gcd(x, y) + 12$$

Здесь $gcd(x, y)$ – наибольший общий делитель x и y.
Если $x \neq y$, то пары $(x; y)$ и $(y; x)$ считаются различными.

Find the number of ordered pairs $(x; y)$ of positive integers satisfying

$$x + y = gcd(x, y) + 12$$

Here $gcd(x, y)$ is a greatest common divisor of x and y.
If $x \neq y$ then pairs $(x; y)$ and $(y; x)$ are considered to be different.

Answer: 27

Solution (ENG). *Explaining the solution of the task 1, others are being solved similarly.*
Let $x = ad, y = bd$ with $d = gcd(x, y)$. Initial equation will transform to $d(a + b - 1) = 6$ while $gcd(a, b) = 1$. The numbers d и $a+b-1$ are positive integers with their product being equal to 6, then all possible values of d are 1, 2, 3 or 6.
First case gives us $a + b - 1 = 6 \Rightarrow a + b = 7$, then we have 6 pairs (a, b).
By the second case, $a + b = 4$ and we have two pairs or relatively prime (a, b): $(1, 3)$ and $(3, 1)$.
Case $d = 3$ gives us $a + b = 3$ and two another pairs (a, b).
At last from $d = 6$ we get $a + b = 2$ and one more pair (a, b).
So, we've got 11 pairs (a, b) with every one of them gives us one pair of (x, y) satisfying initial equation.

Solution (RUS). *Разбор варианта 1, остальные решаются аналогично.*
Пусть $x = ad, y = bd$, где $d = gcd(x, y)$. Уравнение примет вид $d(a+b-1) = 6$, причем $gcd(a, b) = 1$.
Числа d и $a+b-1$ – натуральные, их произведение равно 6, отсюда возможные значения d – либо 1, либо 2, либо 3, либо 6.
В первом случае $a + b - 1 = 6 \Rightarrow a + b = 7$, что дает 6 пар (a, b).
Во втором случае $a + b = 4$, что дает две пары взаимно простых (a, b): $(1, 3)$ и $(3, 1)$.
Случай $d = 3$ дает $a + b = 3$ и еще две пары (a, b).
Наконец, при $d = 6$ имеем $a + b = 2$ и еще одну пару (a, b).
Итого получили 11 пар (a, b), каждая из которых дает одну пару (x, y), удовлетворяющую исходному уравнению.

Task 2.

1. Есть лист бумаги с нарисованной сеткой 10×10 квадратных клеток. Сколько можно нарисовать попарно несовпадающих квадратов, все стороны которых лежат на линиях сетки? Квадраты могут пересекаться друг с другом.

   There is a sheet of paper with a grid of 10×10 squares drawn. Find number of ways to select pairwise mismatched squares on this sheet with their sides lying on the grid. The squares may intersect with some other ones.

Answer: 385

2. Есть лист бумаги с нарисованной сеткой 12×12 квадратных клеток. Сколько можно нарисовать попарно несовпадающих квадратов, все стороны которых лежат на линиях сетки? Квадраты могут пересекаться друг с другом.

   There is a sheet of paper with a grid of 12×12 squares drawn. Find number of ways to select pairwise mismatched squares on this sheet with their sides lying on the grid. The squares may intersect with some other ones.

   Answer: 650

3. Есть лист бумаги с нарисованной сеткой 15×15 квадратных клеток. Сколько можно нарисовать попарно несовпадающих квадратов, все стороны которых лежат на линиях сетки? Квадраты могут пересекаться друг с другом.

   There is a sheet of paper with a grid of 15×15 squares drawn. Find number of ways to select pairwise mismatched squares on this sheet with their sides lying on the grid. The squares may intersect with some other ones.

   Answer: 1240

4. Есть лист бумаги с нарисованной сеткой 19×19 квадратных клеток. Сколько можно нарисовать попарно несовпадающих квадратов, все стороны которых лежат на линиях сетки? Квадраты могут пересекаться друг с другом.

   There is a sheet of paper with a grid of 19×19 squares drawn. Find number of ways to select pairwise mismatched squares on this sheet with their sides lying on the grid. The squares may intersect with some other ones.

   Answer: 2470

Solution (ENG). *Explaining the solution of the task 1, others are being solved similarly.*
Obviously, there are exactly 10^2 squares of the size 1×1. Then each of 2×2 squares is uniquely defined by its lower left square 1×1 which can be selected in 9^2 ways (squares from the «top» and «right» layers of the grid do not fit). Further, similarly: the square 3×3 is selected in 8^2 ways, etc., the square 10×10 is selected in the $1^2 = 1$ way. Total $1^2 + 2^2 + \cdots + 9^2 + 10^2$ ways to select a square on a given grid.
Let's prove by induction on n that $1^2 + 2^2 + \cdots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$ for evere positive integer n.
Base of induction ($n = 1$): $1^2 = \frac{1\cdot(1+1)\cdot(2+1)}{6}$ – true.
Step of induction: let $1^2 + 2^2 + \cdots + k^2 = \frac{k(k+1)(2k+1)}{6}$ for some positive integer k. Let's prove that $1^2+2^2+\cdots+k^2+(k+1)^2 = \frac{(k+1)(k+2)(2(k+1)+1)}{6}$. We have $1^2+2^2+\cdots+k^2+(k+1)^2 = \frac{k(k+1)(2k+1)}{6}+(k+1)^2 = \frac{k+1}{6} \cdot (2k^2 + k + 6(k+1)) = \frac{k+1}{6} \cdot (k+2)(2k+3)$, Q.E.D.
So, $1^2 + 2^2 + \cdots + 9^2 + 10^2 = \frac{10\cdot 11\cdot 21}{6} = 385$.

Solution (RUS). *Разбор варианта 1, остальные решаются аналогично.*
Очевидно, квадратов 1×1 ровно 10^2 штук. Каждый квадрат 2×2 однозначно задается своим нижним левым квадратом 1×1, который можно выбрать 9^2 способами (квадраты из «верхнего» и «правого» слоев не подходят). Далее аналогично: квадрат 3×3 выбирается 8^2 способами и т.д., квадрат 10×10 выбирается $1^2 = 1$ способом. Итого $1^2 + 2^2 + \cdots + 9^2 + 10^2$ способов выбрать квадрат на заданной сетке.
Докажем индукцией по n, что $1^2 + 2^2 + \cdots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$ для любого натурального n.

База индукции ($n = 1$): $1^2 = \frac{1\cdot(1+1)\cdot(2+1)}{6}$ – верное равенство.
Шаг индукции: пусть $1^2+2^2+\dots+k^2 = \frac{k(k+1)(2k+1)}{6}$ для натурального k. Докажем, что $1^2+2^2+\dots+k^2+(k+1)^2 = \frac{(k+1)(k+2)(2(k+1)+1)}{6}$. Действительно, $1^2+2^2+\dots+k^2+(k+1)^2 = \frac{k(k+1)(2k+1)}{6}+(k+1)^2 = \frac{k+1}{6}\cdot(2k^2+k+6(k+1)) = \frac{k+1}{6}\cdot(k+2)(2k+3)$, что и требовалось доказать.
Значит, $1^2+2^2+\dots+9^2+10^2 = \frac{10\cdot 11\cdot 21}{6} = 385$.

Task 3.

1. Последовательность натуральных чисел $a_1, a_2, a_3, \dots$ строится следующим образом: число a_1 выбирается из чисел от 1 до 999999, а каждое следующее число строится по предыдущему: если a_n – чётное, то $a_{n+1} = \frac{a_n}{2}$; если a_n – нечётное, то $a_{n+1} = a_n + 1$; если $a_n = 1$, то последовательность не продолжается.
   Какова наибольшая возможная длина этой последовательности?

   The sequence of positive integers $a_1, a_2, a_3, \dots$ is constructed as follows: the number a_1 is selected from numbers from 1 to 999999, then every next number is constructed from to the previous one: if a_n is even, then $a_{n+1} = \frac{a_n}{2}$; if a_n is odd, then $a_{n+1} = a_n + 1$; if $a_n = 1$, then the sequence does not continue.
   What is the greatest possible length of this sequence?

   Answer: 39

2. Последовательность натуральных чисел $a_1, a_2, a_3, \dots$ строится следующим образом: число a_1 выбирается из чисел от 1 до 1100011, а каждое следующее число строится по предыдущему: если a_n – чётное, то $a_{n+1} = \frac{a_n}{2}$; если a_n – нечётное, то $a_{n+1} = a_n + 1$; если $a_n = 1$, то последовательность не продолжается.
   Какова наибольшая возможная длина этой последовательности?

   The sequence of positive integers $a_1, a_2, a_3, \dots$ is constructed as follows: the number a_1 is selected from numbers from 1 to 1100011, then every next number is constructed from to the previous one: if a_n is even, then $a_{n+1} = \frac{a_n}{2}$; if a_n is odd, then $a_{n+1} = a_n + 1$; if $a_n = 1$, then the sequence does not continue.
   What is the greatest possible length of this sequence?

   Answer: 41

3. Последовательность натуральных чисел $a_1, a_2, a_3, \dots$ строится следующим образом: число a_1 выбирается из чисел от 1 до 505050, а каждое следующее число строится по предыдущему: если a_n – чётное, то $a_{n+1} = \frac{a_n}{2}$; если a_n – нечётное, то $a_{n+1} = a_n + 1$; если $a_n = 1$, то последовательность не продолжается.
   Какова наибольшая возможная длина этой последовательности?

   The sequence of positive integers $a_1, a_2, a_3, \dots$ is constructed as follows: the number a_1 is selected from numbers from 1 to 505050, then every next number is constructed from to the previous one: if a_n is even, then $a_{n+1} = \frac{a_n}{2}$; if a_n is odd, then $a_{n+1} = a_n + 1$; if $a_n = 1$, then the sequence does not continue.
   What is the greatest possible length of this sequence?

   Answer: 37

4. Последовательность натуральных чисел $a_1, a_2, a_3, \dots$ строится следующим образом: число a_1 выбирается из чисел от 1 до 2121212, а каждое следующее число строится по предыдущему:

если a_n – чётное, то $a_{n+1} = \frac{a_n}{2}$; если a_n – нечётное, то $a_{n+1} = a_n + 1$; если $a_n = 1$, то последовательность не продолжается.
Какова наибольшая возможная длина этой последовательности?

The sequence of positive integers $a_1, a_2, a_3, \ldots$ is constructed as follows: the number a_1 is selected from numbers from 1 to 2121212, then every next number is constructed from to the previous one: if a_n is even, then $a_{n+1} = \frac{a_n}{2}$; if a_n is odd, then $a_{n+1} = a_n + 1$; if $a_n = 1$, then the sequence does not continue.
What is the greatest possible length of this sequence?

Answer: 43

Solution (ENG). *Explaining the solution of the task 1, others are being solved similarly.*
Let's move on to the binary number system. Dividing an even number by 2 means discarding the last zero in its notation, and adding 1 to an odd number replaces the block of ones, starting with the least significant bit and going up to the first zero digit (or until the end of the number, if it originally consisted of only ones), by a block of zeros prefixed with one.
The number of digits in a number changes only if the number consisted of only ones – then after adding 1 it becomes a power of two. Let us prove that the addition of one with an increase in the number of digits must occur at least once when constructing a sequence starting with a_1 that is not equal to a power of two. This will mean that it will happen exactly once, because if at some point a power of two becomes a member of the sequence, then all that remains is to divide by 2 (discard zeros).
Suppose the opposite: let such an increase in the number of digits not happen. Then all operations of adding ones do not lead to an increase in the number of digits, at least one of two consecutive operations will drop zero – this means that if the initial number of digits in the binary notation a_1 is equal to m, then in no more than $2(m-1)$ steps we get the number 1 (the only non-zero number, consisting of one digit in binary notation). But 1 can only be obtained from the number 2, which is a power of two, which could not be obtained by adding one – which means that it is obtained by division. Let, before getting the number 1, k of the last operations were division by 2 (but not $k+1$ operations). Then the $(k+1)$ -th operation from the end was the addition of 1 to a number consisting of only ones – a contradiction with the assumption.
It turns out that if the binary notation a_1 (which is not a power of two) contained m digits, then when constructing the sequence, one operation of assigning one and m operations of division by 2 will occur, the remaining operations are adding one to an odd number. Note that with such operations, each time the last unit is shifted at least 1 position closer to the most significant bit, which means that the operations of adding 1 can occur no more than $m-1$ times (including the one that increase number of digits by 1). Thus, the maximum number of operations for a number of m digits does not exceed $(m-2)+1+m = 2m-1$.
The number 999999 has 20 digits in its binary representation, because $2^{19} < 999999 < 2^{20} = 1048576$. Hence, the notation of a_1 consists of no more than 20 digits, and the length of the sequence does not exceed $2 \cdot 20 - 1 = 39$. It is easy to verify that $a_1 = 2^{19} + 1 = 524289$ gives an example of a sequence of length 39.

Solution (RUS). *Разбор варианта 1, остальные решаются аналогично.*
Перейдем к двоичной системе счисления. Деление четного числа на 2 означает отбрасывание последнего нуля в записи числа, а прибавление к нечетному числу единицы заменяет блок из единиц, начинающийся с младшего разряда и идущий до первой нулевой цифры (либо до конца числа, если оно изначально состояло только из единиц), на блок нулей с приписыванием перед ними единицы.
Количество цифр в числе меняется только в случае, если число состояло из одних единиц – тогда после прибавления 1 оно становится степенью двойки. Докажем, что прибавление единицы с увеличением числа разрядов должно хотя бы раз произойти при построении последовательности,

начинающейся с a_1, не равного степени двойки. Это будет означать, что оно случится ровно один раз, потому что если в какой-то момент членом последовательности становится степень двойки, то после этого остается только делить на 2 (отбрасывать нули).

Предположим противное: пусть такого увеличения числа разрядов не случится. Тогда все операции прибавления единиц не приводят к увеличеснию количества разрядов, не менее одной из двух подряд идущих операций будет отбрасывание нуля – значит, если изначальное количество цифр в двоичной записи a_1 равно m, то не более чем за $2(m-1)$ шагов мы получим число 1 (единственное ненулевое число, состоящее из одной цифры в двоичной записи). Но 1 можно получить только из числа 2, которое является степенью двойки, которая не могла быть получена прибавлением единицы – значит, она получена делением. Пусть до получения числа 1 k последних операций были делением на 2 (но не $k+1$ операций). Тогда $(k+1)$-я с конца операция была прибавлением 1 к числу, состоящему из одних единиц – противоречие с предположением.

Получается, если двоичная запись a_1 (не являющегося степенью двойки) содержала m цифр, то при построении последовательности случится одна операция приписывания единицы и m операций деления на 2, остальные операции – прибавление единицы к нечетному числу. Заметим, что при таких операциях каждый раз последняя единица сдвигается как минимум на 1 позицию ближе к старшему разряду – значит, операции прибавления 1 могут произойти не более $m-1$ раз (из них одна – уже учтенная операция с увеличением числа разрядов). Таким образом, максимальное количество операций для числа из m разрядов не превосходит $(m-2)+1+m = 2m-1$.

Число 999999 имеет в своей двоичной записи 20 цифр, поскольку $2^{19} < 999999 < 2^{20} = 1048576$. Значит, запись a_1 состоит не более чем из 20 цифр, и длина последовательности не превосходит $2 \cdot 20 - 1 = 39$. Нетрудно убедиться в том, что $a_1 = 2^{19} + 1 = 524289$ дает пример последовательности длины 39.

Task 4.

1. Дан правильный 2021-угольник (все его стороны равны, все углы тоже равны) $A_1A_2A_3\ldots A_{2020}A_{2021}$. Точки B и C – середины сторон $A_{1846}A_{1847}$ и $A_{1842}A_{1843}$ соответственно. Найдите меньший из углов между прямыми A_1B и $A_{2018}C$, ответ дайте в градусах, при необходимости округлив до сотых.

   There is a regular polygon (all sides are equal, all angles are also equal to each other) with 2021 sides named $A_1A_2A_3\ldots A_{2020}A_{2021}$. Points B and C are located at the centers of the sides $A_{1846}A_{1847}$ and $A_{1842}A_{1843}$ respectively. Find smaller angle between the lines A_1B and $A_{2018}C$ and give your answer in degrees rounded to two decimals, if needed.

   Answer: 0.71

2. Дан правильный 2021-угольник (все его стороны равны, все углы тоже равны) $A_1A_2A_3\ldots A_{2020}A_{2021}$. Точки B и C – середины сторон $A_{1261}A_{1262}$ и $A_{1799}A_{1800}$ соответственно. Найдите меньший из углов между прямыми A_1B и $A_{538}C$, ответ дайте в градусах, при необходимости округлив до сотых.

   There is a regular polygon (all sides are equal, all angles are also equal to each other) with 2021 sides named $A_1A_2A_3\ldots A_{2020}A_{2021}$. Points B and C are located at the centers of the sides $A_{1261}A_{1262}$ and $A_{1799}A_{1800}$ respectively. Find smaller angle between the lines A_1B and $A_{538}C$ and give your answer in degrees rounded to two decimals, if needed.

   Answer: 84.17

3. Дан правильный 2021-угольник (все его стороны равны, все углы тоже равны) $A_1A_2A_3\ldots A_{2020}A_{2021}$. Точки B и C – середины сторон $A_{964}A_{965}$ и $A_{57}A_{58}$ соответственно.

Найдите меньший из углов между прямыми A_1B и $A_{1115}C$, ответ дайте в градусах, при необходимости округлив до сотых.

There is a regular polygon (all sides are equal, all angles are also equal to each other) with 2021 sides named $A_1A_2A_3\ldots A_{2020}A_{2021}$. Points B and C are located at the centers of the sides $A_{964}A_{965}$ and $A_{57}A_{58}$ respectively. Find smaller angle between the lines A_1B and $A_{1115}C$ and give your answer in degrees rounded to two decimals, if needed.

Answer: 18.44

4. Дан правильный 2021-угольник (все его стороны равны, все углы тоже равны) $A_1A_2A_3\ldots A_{2020}A_{2021}$. Точки B и C – середины сторон $A_{2000}A_{2001}$ и $A_{34}A_{35}$ соответственно. Найдите меньший из углов между прямыми A_1B и $A_{55}C$, ответ дайте в градусах, при необходимости округлив до сотых.

   There is a regular polygon (all sides are equal, all angles are also equal to each other) with 2021 sides named $A_1A_2A_3\ldots A_{2020}A_{2021}$. Points B and C are located at the centers of the sides $A_{2000}A_{2001}$ and $A_{34}A_{35}$ respectively. Find smaller angle between the lines A_1B and $A_{55}C$ and give your answer in degrees rounded to two decimals, if needed.

   Answer: 9.80

Solution (ENG). *Explaining the solution of the task 1, others are being solved similarly.*
Let point O be the center of the polygon $A_1A_2A_3\ldots A_{2020}A_{2021}$. Segments $OA_1, OA_2, \ldots, OA_{2021}$ divide the polygon into isosceles triangles equal to each other with an angle $\alpha = \frac{360^\circ}{2021}$ being opposite to their bases.
Notice that when the polygon is rotated around the point O by an angle 4α, the line A_1B will turn into $A_{2018}C$ – thus, the angle between these lines is $4\alpha = \frac{4\cdot 360^\circ}{2021} \approx 0.71^\circ$.

Solution (RUS). *Разбор варианта 1, остальные решаются аналогично.*
Пусть точка O – центр многоугольника $A_1A_2A_3\ldots A_{2020}A_{2021}$. Проведем отрезки $OA_1, OA_2, \ldots, OA_{2021}$ – они поделят многоугольник на равные друг другу равнобедренные треугольники, угол при вершинах которых равен $\alpha = \frac{360^\circ}{2021}$.
Заметим, что при повороте многоугольника вокруг точки O на угол 4α прямая A_1B перейдет в $A_{2018}C$ – значит, угол между этими прямыми равен $4\alpha = \frac{4\cdot 360^\circ}{2021} \approx 0.71^\circ$.

Task 5.

1. Сравните числа 26^{47} и 11^{71}.

   Which number is greater: 26^{47} or 11^{71}?

   Answer: $26^{47} < 11^{71}$

2. Сравните числа 26^{53} и 11^{80}.

   Which number is greater: 26^{53} or 11^{80}?

   Answer: $26^{53} < 11^{80}$

3. Сравните числа 26^{83} и 11^{125}.

   Which number is greater: 26^{83} or 11^{125}?

   Answer: $26^{83} < 11^{125}$

4. Сравните числа 26^{67} и 11^{101}.

   Which number is greater: 26^{67} or 11^{101}?

   Answer: $26^{67} < 11^{101}$

Solution (ENG). *Explaining the solution of the task 1, others are being solved similarly.*
Obviously $26^{47} < 27^{47} = 3^{141}$ and $11^{71} > 9^{71} = 3^{142}$. Thus, we have $26^{47} < 3^{141} < 3^{142} < 11^{71}$ which gives us $26^{47} < 11^{71}$.
A common mistake when solving such problems can occur while rounding a number – it is important to understand in which direction we round it: for example, when comparing the numbers 11^6 and 999999, you can use the transitivity of inequalities, since $11^6 > 10^6 > 999999$, i.e. we have reduced the larger number. If we, for example, decrease a smaller number, then the resulting output does not lead to the correct answer. If we do not know in which direction we've rounded, then the conclusions obtained are all the more useless.

Solution (RUS). *Разбор варианта 1, остальные решаются аналогично.*
Очевидно, $26^{47} < 27^{47} = 3^{141}$ и $11^{71} > 9^{71} = 3^{142}$. Имеем $26^{47} < 3^{141} < 3^{142} < 11^{71}$, что дает $26^{47} < 11^{71}$.
Распространенная ошибка при решении подобных задач может возникнуть при округлении – важно понимать, в какую сторону оно происходит: например, при сравнении чисел 11^6 и 999999 можно воспользоваться транзитивностью неравенств, поскольку $11^6 > 10^6 > 999999$, т.е. мы уменьшили большее число. Если же мы, к примеру, уменьшаем меньшее число, то получаемый вывод не приводит к верному ответу. Если мы не знаем, в какую сторону округлили, то полученные выводы тем более бесполезны.

Task 6.

1. Найдите цифру, стоящую в разряде сотен десятичной записи числа $5^{4^{3^{2^{7}}}}$.

   Find the third digit (from the right) of the decimal notation of the number $5^{4^{3^{2^{7}}}}$.

   Answer: 6

2. Найдите цифру, стоящую в разряде сотен десятичной записи числа $5^{3^{4^{2^{6}}}}$.

   Find the third digit (from the right) of the decimal notation of the number $5^{3^{4^{2^{6}}}}$.

   Answer: 1

3. Найдите цифру, стоящую в разряде сотен десятичной записи числа $5^{6^{7^{8^{9}}}}$.

   Find the third digit (from the right) of the decimal notation of the number $5^{6^{7^{8^{9}}}}$.

Answer: 6

4. Найдите цифру, стоящую в разряде сотен десятичной записи числа $5^{9^{8^{7^6}}}$.

   Find the third digit (from the right) of the decimal notation of the number $5^{9^{8^{7^6}}}$.

Answer: 1

Solution (ENG). *Explaining the solution of the task 1, others are being solved similarly.* Let's look at the last 3 digits in decimal notation of 5^n:

n	1	2	3	4	5	6	7
$5^n \pmod{1000}$	005	025	125	625	125	625	125

$125 \cdot 5 = 625$, $625 \cdot 5 = 3125 \equiv 125 \pmod{1000}$ – thus, with $n > 2$ we have $5^n \equiv 125 \pmod{1000}$ for odd positive integers n, and $5^n \equiv 625 \pmod{1000}$ for even positive integers n.
By that, the 3rd digit in decimal notation of 5^n depends only on parity of n. Notice that 4^m is even for all positive integers m – thus, 5^{4^m} (also with $m = 3^{2^7}$ as it is in the task's formulation) ends by 625 which gives us digit 6 as the answer.
Note that $a^{b^c} \neq (a^b)^c = a^{bc}$. True equality is $a^{b^c} = a^{(b^c)}$.

Solution (RUS). *Разбор варианта 1, остальные решаются аналогично.*
Рассмотрим последние три цифры в записи чисел 5^n:

n	1	2	3	4	5	6	7
$5^n \pmod{1000}$	005	025	125	625	125	625	125

$125 \cdot 5 = 625$, $625 \cdot 5 = 3125 \equiv 125 \pmod{1000}$ – значит, при $n > 2$: $5^n \equiv 125 \pmod{1000}$ для нечетных n и $5^n \equiv 625 \pmod{1000}$ для четных n.
Отсюда следует, что цифра в разряде сотен зависит только от четности показателя степени «пятерки». Число 4^m четно при любом натуральном m – значит, 5^{4^m} (в частности, при $m = 3^{2^7}$, как в условии задачи) оканчивается на 625, следовательно, цифра в разряде сотен – это 6.
Обратите внимание, что $a^{b^c} \neq (a^b)^c = a^{bc}$. Скорее $a^{b^c} = a^{(b^c)}$.

8-9 degree

Task 1.

1. В прямоугольнике $ABCD$ из вершин B и D опущены перпендикуляры на диагональ AC. Эти перпендикуляры пересекают диагональ в точках P и Q соответственно. Найдите площадь прямоугольника, если $AP = 2$, $PQ = 6$.

   There are perpendiculars BP, DQ dropped to the diagonal AC of a rectangle $ABCD$ while points P, Q are located on the diagonal. Find the area of the rectangle while $AP = 2$, $PQ = 6$.

   Answer: 40

2. В прямоугольнике $ABCD$ из вершин B и D опущены перпендикуляры на диагональ AC. Эти перпендикуляры пересекают диагональ в точках P и Q соответственно. Найдите площадь прямоугольника, если $AP = 3$, $PQ = 9$.

   There are perpendiculars BP, DQ dropped to the diagonal AC of a rectangle $ABCD$ while points P, Q are located on the diagonal. Find the area of the rectangle while $AP = 3$, $PQ = 9$.

   Answer: 90

3. В прямоугольнике $ABCD$ из вершин B и D опущены перпендикуляры на диагональ AC. Эти перпендикуляры пересекают диагональ в точках P и Q соответственно. Найдите площадь прямоугольника, если $AP = 7$, $PQ = 21$.

   There are perpendiculars BP, DQ dropped to the diagonal AC of a rectangle $ABCD$ while points P, Q are located on the diagonal. Find the area of the rectangle while $AP = 7$, $PQ = 21$.

   Answer: 490

4. В прямоугольнике $ABCD$ из вершин B и D опущены перпендикуляры на диагональ AC. Эти перпендикуляры пересекают диагональ в точках P и Q соответственно. Найдите площадь прямоугольника, если $AP = 6$, $PQ = 18$.

   There are perpendiculars BP, DQ dropped to the diagonal AC of a rectangle $ABCD$ while points P, Q are located on the diagonal. Find the area of the rectangle while $AP = 6$, $PQ = 18$.

   Answer: 360

Solution (ENG). *Explaining the solution of the task 1, others are being solved similarly.* Let O be the intersection point of the diagonals of the rectangle. Then $BO = AO = AP + PO = AP + \frac{1}{2}PQ = 5$. By the Pythagorean theorem for $\triangle BPO$ we get $BP = \sqrt{BO^2 - PO^2} = \sqrt{5^2 - 3^2} = 4$. Then the area of $\triangle ABC$ equals $\frac{1}{2}AC \cdot BP = 20$ and the area of $ABCD$ is equal to 40.

Solution (RUS). *Разбор варианта 1, остальные решаются аналогично.* Пусть O – точка пересечения диагоналей прямоугольника. Тогда $BO = AO = AP + PO = AP + \frac{1}{2}PQ = 5$. По теореме Пифагора для $\triangle BPO$ имеем $BP = \sqrt{BO^2 - PO^2} = \sqrt{5^2 - 3^2} = 4$. Тогда площадь $\triangle ABC$ равна $\frac{1}{2}AC \cdot BP = 20$ и площадь $ABCD$ равна 40.

Task 2.

1. Найти количество пар $(x; y)$ целых чисел, удовлетворяющих равенству
$$\sqrt{x} + \sqrt{y} = \sqrt{20339}$$
Если $x \neq y$, то пары $(x; y)$ и $(y; x)$ считаются различными.

   Find the number of ordered pairs $(x; y)$ of integers satisfying
$$\sqrt{x} + \sqrt{y} = \sqrt{20339}$$
If $x \neq y$ then pairs $(x; y)$ and $(y; x)$ are considered to be different.

   Answer: 44

2. Найти количество пар $(x; y)$ целых чисел, удовлетворяющих равенству
$$\sqrt{x} + \sqrt{y} = \sqrt{16337}$$
Если $x \neq y$, то пары $(x; y)$ и $(y; x)$ считаются различными.

   Find the number of ordered pairs $(x; y)$ of integers satisfying
$$\sqrt{x} + \sqrt{y} = \sqrt{16337}$$
If $x \neq y$ then pairs $(x; y)$ and $(y; x)$ are considered to be different.

   Answer: 32

3. Найти количество пар $(x; y)$ целых чисел, удовлетворяющих равенству
$$\sqrt{x} + \sqrt{y} = \sqrt{31423}$$
Если $x \neq y$, то пары $(x; y)$ и $(y; x)$ считаются различными.

   Find the number of ordered pairs $(x; y)$ of integers satisfying
$$\sqrt{x} + \sqrt{y} = \sqrt{31423}$$
If $x \neq y$ then pairs $(x; y)$ and $(y; x)$ are considered to be different.

   Answer: 68

4. Найти количество пар $(x; y)$ целых чисел, удовлетворяющих равенству
$$\sqrt{x} + \sqrt{y} = \sqrt{45253}$$
Если $x \neq y$, то пары $(x; y)$ и $(y; x)$ считаются различными.

   Find the number of ordered pairs $(x; y)$ of integers satisfying
$$\sqrt{x} + \sqrt{y} = \sqrt{45253}$$
If $x \neq y$ then pairs $(x; y)$ and $(y; x)$ are considered to be different.

   Answer: 60

Solution (ENG). *Explaining the solution of the task 1, others are being solved similarly.* Notice that $20339 = 11 \cdot 43^2$ with 11 and 43 being prime numbers. Initial equality transforms to $\sqrt{x} = \sqrt{20339} - \sqrt{y} \Rightarrow x = y + 20339 - 2\sqrt{20339y} \Rightarrow \sqrt{4 \cdot 20339y} \in \mathbb{Z}$. Thus, $y = 11 \cdot d^2$ for some integer $d \leq 43$. Every such y gives us a unique $x = 11 \cdot (43 - d)^2$ – therefore, the number of solutions of the initial equation equals to the number of those d. So, the number is 44.

Solution (RUS). *Разбор варианта 1, остальные решаются аналогично.* Заметим, что $20339 = 11 \cdot 43^2$, где 11 и 43 – простые числа. Исходное равенство преобразуется к виду $\sqrt{x} = \sqrt{20339} - \sqrt{y} \Rightarrow x = y + 20339 - 2\sqrt{20339y} \Rightarrow \sqrt{4 \cdot 20339y} \in \mathbb{Z}$. Значит, $y = 11 \cdot d^2$ для некоторого целого d, не превосходящего 43. Каждому такому y соответствует единственное $x = 11 \cdot (43 - d)^2$ – значит, общее количество решений – это количество целых неотрицательных $d \leq 43$, отсюда количество решений равно 44.

Task 3.

1. Есть лист бумаги с нарисованной сеткой $N \times N$ квадратных клеток. Известно, что на нем можно нарисовать 11025 попарно несовпадающих прямоугольников, стороны которых совпадают с линиями сетки (прямоугольники могут пересекаться друг с другом). Найдите наименьшее возможное N.

   There is a sheet of paper with a grid of $N \times N$ squares drawn. It is known that there is possible to select 11025 pairwise mismatched rectangles on this sheet with their sides lying on the grid (the rectangles may intersect with some other ones). Find smallest possible N.

   Answer: 14

2. Есть лист бумаги с нарисованной сеткой $N \times N$ квадратных клеток. Известно, что на нем можно нарисовать 23409 попарно несовпадающих прямоугольников, стороны которых совпадают с линиями сетки (прямоугольники могут пересекаться друг с другом). Найдите наименьшее возможное N.

   There is a sheet of paper with a grid of $N \times N$ squares drawn. It is known that there is possible to select 23409 pairwise mismatched rectangles on this sheet with their sides lying on the grid (the rectangles may intersect with some other ones). Find smallest possible N.

   Answer: 17

3. Есть лист бумаги с нарисованной сеткой $N \times N$ квадратных клеток. Известно, что на нем можно нарисовать 18496 попарно несовпадающих прямоугольников, стороны которых совпадают с линиями сетки (прямоугольники могут пересекаться друг с другом). Найдите наименьшее возможное N.

   There is a sheet of paper with a grid of $N \times N$ squares drawn. It is known that there is possible to select 18496 pairwise mismatched rectangles on this sheet with their sides lying on the grid (the rectangles may intersect with some other ones). Find smallest possible N.

   Answer: 16

4. Есть лист бумаги с нарисованной сеткой $N \times N$ квадратных клеток. Известно, что на нем можно нарисовать 76176 попарно несовпадающих прямоугольников, стороны которых совпадают с линиями сетки (прямоугольники могут пересекаться друг с другом). Найдите наименьшее возможное N.

There is a sheet of paper with a grid of $N \times N$ squares drawn. It is known that there is possible to select 76176 pairwise mismatched rectangles on this sheet with their sides lying on the grid (the rectangles may intersect with some other ones). Find smallest possible N.

Answer: 23

Solution (ENG). *Explaining the solution of the task 1, others are being solved similarly.*
We will call one of the sides of the grid «lower» (opposite one – «upper»), one of the adjacent sides – «left» (opposite one – «right»). Each rectangle on the grid lines is uniquely defined by its lower left (A) and upper right (B) vertices. Let us introduce a coordinate system in which the OX axis coincides with the bottom side of the grid, and the OY axis coincides with the left side of the grid.
Let the point A has coordinates (x, y), where x, y are positive integers from 1 to N. Then there are $(N-x)(N-y)$ ways to select its vertex B. Hence, the number of rectangles on the grid lines is $\sum\limits_{x=1}^{N}\sum\limits_{y=1}^{N}(N-x)(N-y) = \sum\limits_{x=1}^{N}(N-x)\sum\limits_{y=1}^{N}(N-y) = ((N-1)+(N-2)+\cdots+(N-1)+(N-N))^2 = \frac{N^2(N+1)^2}{4}$ – an increasing function.
It is given that $\frac{N^2(N+1)^2}{4} \geq 11025 \Rightarrow \frac{N(N+1)}{2} \geq 105 \Rightarrow N \geq 14$. So, the smallest value of N is 14.

Solution (RUS). *Разбор варианта 1, остальные решаются аналогично.*
Будем называть одну из сторон сетки «нижней» (противоположную – верхней), одну из смежных к ней сторон – «левой» (противоположную – правой). Каждый прямоугольник на линиях сетки однозначно задается своими левой нижней (A) и правой верхней (B) вершинами. Введем систему координат, в которой ось OX совпадает с нижней стороной сетки, а ось OY – с левой стороной сетки.
Пусть точка A имеет координаты (x, y), где x, y – натуральные числа от 1 до N. Тогда есть $(N-x)(N-y)$ способов выбрать его вершину B. Значит, количество прямоугольников на линиях сетки равно $\sum\limits_{x=1}^{N}\sum\limits_{y=1}^{N}(N-x)(N-y) = \sum\limits_{x=1}^{N}(N-x)\sum\limits_{y=1}^{N}(N-y) = ((N-1)+(N-2)+\cdots+(N-1)+(N-N))^2 = \frac{N^2(N+1)^2}{4}$ – возрастающая функция от N.
Известно, что $\frac{N^2(N+1)^2}{4} \geq 11025 \Rightarrow \frac{N(N+1)}{2} \geq 105 \Rightarrow N \geq 14$. Значит, наименьшее значение N равно 14.

Task 4.

1. Найдите последние четыре цифры десятичной записи числа

$$5^{5^{5^1}} + 5^{5^{5^2}} + \cdots + 5^{5^{5^{11}}}$$

Запишите эти цифры в поле для ответа с сохранением их порядка без пробелов и других символов, т.е. в виде четырехзначного числа.

Find the last 4 digits of the decimal notation of the number

$$5^{5^{5^1}} + 5^{5^{5^2}} + \cdots + 5^{5^{5^{11}}}$$

Write these digits in the answer as a 4-digit number (keeping their order without spaces and any other characters).

Answer: 4375

2. Найдите последние четыре цифры десятичной записи числа

$$5^{5^{5^1}} + 5^{5^{5^2}} + \cdots + 5^{5^{5^{14}}}$$

Запишите эти цифры в поле для ответа с сохранением их порядка без пробелов и других символов, т.е. в виде четырехзначного числа.

Find the last 4 digits of the decimal notation of the number

$$5^{5^{5^1}} + 5^{5^{5^2}} + \cdots + 5^{5^{5^{14}}}$$

Write these digits in the answer as a 4-digit number (keeping their order without spaces and any other characters).

Answer: 3750

3. Найдите последние четыре цифры десятичной записи числа

$$5^{5^{5^1}} + 5^{5^{5^2}} + \cdots + 5^{5^{5^{15}}}$$

Запишите эти цифры в поле для ответа с сохранением их порядка без пробелов и других символов, т.е. в виде четырехзначного числа.

Find the last 4 digits of the decimal notation of the number

$$5^{5^{5^1}} + 5^{5^{5^2}} + \cdots + 5^{5^{5^{15}}}$$

Write these digits in the answer as a 4-digit number (keeping their order without spaces and any other characters).

Answer: 6875

4. Найдите последние четыре цифры десятичной записи числа

$$5^{5^{5^1}} + 5^{5^{5^2}} + \cdots + 5^{5^{5^{18}}}$$

Запишите эти цифры в поле для ответа с сохранением их порядка без пробелов и других символов, т.е. в виде четырехзначного числа.

Find the last 4 digits of the decimal notation of the number

$$5^{5^{5^1}} + 5^{5^{5^2}} + \cdots + 5^{5^{5^{18}}}$$

Write these digits in the answer as a 4-digit number (keeping their order without spaces and any other characters).

Answer: 6250

Solution (ENG). *Explaining the solution of the task 1, others are being solved similarly.* The last 4 digits of a number are its remainder when divided by $10^4 = 2^4 \cdot 5^4$. Obviously, for integers $n \geq 0$ the remainder when dividing $5^{5^{5^n}}$ by 5^4 is 0 since $5^{5^n} > 4$. Let's find the remainder when $5^{5^{5^n}}$ is divided by 2^4: according to Euler's theorem, $5^{5^{5^n}} \equiv 5 \pmod{2^4}$ since $5^{5^n} \equiv c \pmod{\phi(2^4)}$, where $\phi(2^4) = 8$ is the Euler function, and $c = 1$ for odd n and $c = 5$ for even n.

According to the Chinese Remainder Theorem, there is a unique d such that if $5^{5^{5^n}} \equiv 5 \pmod{2^4}$ and $5^{5^{5^n}} \equiv 0 \pmod{5^4}$, then $5^{5^{5^n}} \equiv d \pmod{2^4 \cdot 5^4}$. It is easy to see that $d = 3125$ fits: it is divisible by 5^4 and gives the remainder of 5 when divided by 2^4. So, $5^{5^{5^n}}$ ends by 3125 for any positive integer n. Then $3125 \cdot 11 \equiv 4375 \pmod{10^4}$.

Solution (RUS). *Разбор варианта 1, остальные решаются аналогично.*
Последние 4 цифры числа – это его остаток при делении на $10^4 = 2^4 \cdot 5^4$. Очевидно, при целых $n \geq 0$ остаток при делении $5^{5^{5^n}}$ на 5^4 равен 0, поскольку $5^{5^n} > 4$. Найдем остаток при делении $5^{5^{5^n}}$ на 2^4: согласно теореме Эйлера, $5^{5^{5^n}} \equiv 5 \pmod{2^4}$, поскольку $5^{5^n} \equiv c \pmod{\phi(2^4)}$, где $\phi(2^4) = 8$ – функция Эйлера, а $c = 1$ при нечетных n и $c = 5$ при четных n.
Согласно китайской теореме об остатках, существует единственное d, такое, что если $5^{5^{5^n}} \equiv 5 \pmod{2^4}$ и $5^{5^{5^n}} \equiv 0 \pmod{5^4}$, то $5^{5^{5^n}} \equiv d \pmod{2^4 \cdot 5^4}$. Нетрудно видеть, что $d = 3125$ подходит: оно делится на 5^4 и дает остаток 5 при делении на 2^4. Значит, $5^{5^{5^n}}$ оканчивается на 3125 при любом натуральном n. Далее: $3125 \cdot 11 \equiv 4375 \pmod{10^4}$.

Task 5.

1. Найдите все функции $f(x)$, которые при любых вещественных x, y удовлетворяют равенству

$$f(x^2 + y) = f(x^2 - y) + 2x^4 f(y)$$

   Find all functions $f(x)$ that for all real x, y satisfy

$$f(x^2 + y) = f(x^2 - y) + 2x^4 f(y)$$

   Answer: $f(x) \equiv 0$

2. Найдите все функции $f(x)$, которые при любых вещественных x, y удовлетворяют равенству

$$f(x^2 + y) = f(x^2 - y) - 2x^4 f(y)$$

   Find all functions $f(x)$ that for all real x, y satisfy

$$f(x^2 + y) = f(x^2 - y) - 2x^4 f(y)$$

   Answer: $f(x) \equiv 0$

3. Найдите все функции $f(x)$, которые при любых вещественных x, y удовлетворяют равенству

$$f(x^2 + y) = f(x^2 - y) + 7x^4 f(y)$$

   Find all functions $f(x)$ that for all real x, y satisfy

$$f(x^2 + y) = f(x^2 - y) + 7x^4 f(y)$$

   Answer: $f(x) \equiv 0$

4. Найдите все функции $f(x)$, которые при любых вещественных x, y удовлетворяют равенству

$$f(x^2+y) = f(x^2-y) - 5x^4 f(y)$$

Find all functions $f(x)$ that for all real x, y satisfy

$$f(x^2+y) = f(x^2-y) - 5x^4 f(y)$$

Answer: $f(x) \equiv 0$

Solution (ENG). *Explaining the solution of the task 1, others are being solved similarly.*
While the function $f(t)$ is defined for all $t \in \mathbb{R}$, we put $x = 0$ in the given equality for f: $f(-y) - f(y) = 0$ for any $y \in \mathbb{R}$, thus our function f is even.
So, $2x^4 f(y) = 2x^4 f(-y)$ for all real x, y, then $f(x^2-y) - f(x^2+y) = f(x^2-(-y)) - f(x^2+(-y)) \Rightarrow f(x^2-y) = f(x^2+y) \Rightarrow 2x^4 f(y) = 0$ for all x, y.
Thus, $f(t) = 0$ for all $t \in \mathbb{R}$.

Solution (RUS). *Разбор варианта 1, остальные решаются аналогично.*
Поскольку функция $f(t)$ определена для всех $t \in \mathbb{R}$, подставим в равенство в условии $x = 0$: $f(-y) - f(y) = 0$ для любого $y \in \mathbb{R}$, т.е. функция f – чётная.
Значит, $2x^4 f(y) = 2x^4 f(-y)$ для произвольных x, y, откуда $f(x^2-y) - f(x^2+y) = f(x^2-(-y)) - f(x^2+(-y)) \Rightarrow f(x^2-y) = f(x^2+y) \Rightarrow 2x^4 f(y) = 0$ для любых вещественных x, y.
Отсюда $f(t) = 0$ для всех $t \in \mathbb{R}$.

Task 6.

1. Решите уравнение:

$$\frac{1}{x^3} - \frac{1}{(x+2)^3} = 88$$

Solve for real x:

$$\frac{1}{x^3} - \frac{1}{(x+2)^3} = 88$$

Answer: $\frac{-2\pm\sqrt{6}}{2}$

2. Решите уравнение:

$$\frac{1}{x^3} - \frac{1}{(x+2)^3} = 270$$

Solve for real x:

$$\frac{1}{x^3} - \frac{1}{(x+2)^3} = 270$$

Answer: $-1 \pm \frac{2\sqrt{3}}{3}$

3. Решите уравнение:

$$\frac{1}{(x+2)^3} - \frac{1}{x^3} = 40$$

Solve for real x:

$$\frac{1}{(x+2)^3} - \frac{1}{x^3} = 40$$

Answer: $\frac{-2\pm\sqrt{2}}{2}$

4. Решите уравнение:

$$\frac{1}{(x+2)^3}-\frac{1}{x^3}=162$$

Solve for real x:

$$\frac{1}{(x+2)^3}-\frac{1}{x^3}=162$$

Answer: $-1\pm\frac{\sqrt{6}}{3}$

Solution (ENG). *Explaining the solution of the task 1, others are being solved similarly.* Let's note: $y=x+2$. Then we get system of equations for x and y:

$$\begin{cases} y-x=2 \\ \frac{1}{x^3}-\frac{1}{y^3}=88 \end{cases}$$

The second equations transforms like $\frac{y^3-x^3}{x^3y^3}=88 \Rightarrow (y-x)(y^2+xy+x^2)=88(xy)^3 \Rightarrow (y-x)((y-x)^2+3xy)=88(xy)^3$. Using $y-x=2$ and noting $t=xy$ we get $88t^3-6t-8=0 \Rightarrow 44t^3-3t-4=0$. One of its roots is: $t=\frac{1}{2}$. From division $44t^3-3t-4$ by $t-\frac{1}{2}$ we get $44t^2+22t+8$which has negative discriminant and no real roots.
So,

$$\begin{cases} y-x=2 \\ xy=\frac{1}{2} \end{cases}$$

from where $x=\frac{-2\pm\sqrt{6}}{2}$.

Solution (RUS). *Разбор варианта 1, остальные решаются аналогично.* Введем обозначение: $y=x+2$. Получим систему уравнений, равносильную исходному уравнению:

$$\begin{cases} y-x=2 \\ \frac{1}{x^3}-\frac{1}{y^3}=88 \end{cases}$$

Преобразуем второе уравнение системы: $\frac{y^3-x^3}{x^3y^3}=88 \Rightarrow (y-x)(y^2+xy+x^2)=88(xy)^3 \Rightarrow (y-x)((y-x)^2+3xy)=88(xy)^3$. Используя $y-x=2$ и обозначая $t=xy$, получим $88t^3-6t-8=0 \Rightarrow 44t^3-3t-4=0$. Один из корней этого уравнения: $t=\frac{1}{2}$. При делении $44t^3-3t-4$ на $t-\frac{1}{2}$ получим квадратный трехчлен $44t^2+22t+8$, дискриминант которого отрицателен.
Итак,

$$\begin{cases} y-x=2 \\ xy=\frac{1}{2} \end{cases}$$

откуда $x=\frac{-2\pm\sqrt{6}}{2}$.

10-12 degree

Task 1.

1. Дана шестиугольная призма, основания которой – правильные шестиугольники $ABCDEF$ и $A_1B_1C_1D_1E_1F_1$ со стороной $2\sqrt{\frac{7}{3}}$, а боковые ребра перпендикулярны основаниям и равны $\sqrt{7}$. Центры оснований – точки O и O_1 соответственно; точка X – середина отрезка OA, точка Y – середина O_1C_1.
Известно, что пчела проползла по поверхности этой призмы из точки X в точку Y по наикратчайшей траектории. Найдите длину этой траектории.

   There is a hexagonal prism with the bases being regular hexagons $ABCDEF$ and $A_1B_1C_1D_1E_1F_1$ with sides $2\sqrt{\frac{7}{3}}$, and the lateral edges being perpendicular to the bases and equal to $\sqrt{7}$. The centers of the bases are points O and O_1 respectively; point X is a midpoint of segment OA, point Y is a midpoint of O_1C_1.
It is known that a bee crawled along the surface of the prism from point X to point Y by the shortest path. Find the length of this path.

   Answer: 7

2. Дана шестиугольная призма, основания которой – правильные шестиугольники $ABCDEF$ и $A_1B_1C_1D_1E_1F_1$ со стороной $\sqrt{\frac{13}{3}}$, а боковые ребра перпендикулярны основаниям и равны $\sqrt{13}$. Центры оснований – точки O и O_1 соответственно; точка X – середина отрезка OA, точка Y – середина O_1C_1.
Известно, что пчела проползла по поверхности этой призмы из точки X в точку Y по наикратчайшей траектории. Найдите длину этой траектории.

   There is a hexagonal prism with the bases being regular hexagons $ABCDEF$ and $A_1B_1C_1D_1E_1F_1$ with sides $\sqrt{\frac{13}{3}}$, and the lateral edges being perpendicular to the bases and equal to $\sqrt{13}$. The centers of the bases are points O and O_1 respectively; point X is a midpoint of segment OA, point Y is a midpoint of O_1C_1.
It is known that a bee crawled along the surface of the prism from point X to point Y by the shortest path. Find the length of this path.

   Answer: 6.24

3. Дана шестиугольная призма, основания которой – правильные шестиугольники $ABCDEF$ и $A_1B_1C_1D_1E_1F_1$ со стороной $4\sqrt{57}$, а боковые ребра перпендикулярны основаниям и равны $3\sqrt{19}$. Центры оснований – точки O и O_1 соответственно; точка X – середина отрезка OA, точка Y – середина O_1C_1.
Известно, что пчела проползла по поверхности этой призмы из точки X в точку Y по наикратчайшей траектории. Найдите длину этой траектории.

   There is a hexagonal prism with the bases being regular hexagons $ABCDEF$ and $A_1B_1C_1D_1E_1F_1$ with sides $4\sqrt{57}$, and the lateral edges being perpendicular to the bases and equal to $3\sqrt{19}$. The centers of the bases are points O and O_1 respectively; point X is a midpoint of segment OA, point Y is a midpoint of O_1C_1.
It is known that a bee crawled along the surface of the prism from point X to point Y by the shortest path. Find the length of this path.

Answer: 57

4. Дана шестиугольная призма, основания которой – правильные шестиугольники $ABCDEF$ и $A_1B_1C_1D_1E_1F_1$ со стороной $6\sqrt{3}$, а боковые ребра перпендикулярны основаниям и равны 6. Центры оснований – точки O и O_1 соответственно; точка X – середина отрезка OA, точка Y – середина O_1C_1.
   Известно, что пчела проползла по поверхности этой призмы из точки X в точку Y по наикратчайшей траектории. Найдите длину этой траектории.

   There is a hexagonal prism with the bases being regular hexagons $ABCDEF$ and $A_1B_1C_1D_1E_1F_1$ with sides $6\sqrt{3}$, and the lateral edges being perpendicular to the bases and equal to 6. The centers of the bases are points O and O_1 respectively; point X is a midpoint of segment OA, point Y is a midpoint of O_1C_1.
   It is known that a bee crawled along the surface of the prism from point X to point Y by the shortest path. Find the length of this path.

Answer: 21

Solution (ENG). *Explaining the solution of the task 1, others are being solved similarly.*
The bee should crawl along the $ABCDEF$ facet, along the lateral surface of the prism and along the $A_1B_1C_1D_1E_1F_1$ facet in that order. Indeed, if the bee left the facet $ABCDEF$ at the point P and then returned to this facet through the point Q, then it did not follow the shortest path: the shortest path between the points of the convex $ABCDEF$ also lies in $ABCDEF$. Likewise with $A_1B_1C_1D_1E_1F_1$.
Considering the unfolding of the prism, we will make sure that the shortest path of the bee between the points X and Y does not go beyond the surface of the prism $ABCOA_1B_1C_1O_1$ – it means that it passes along the facet ABB_1A_1 or along the facet BCC_1B_1. Having considered the sweeps $ABCOA_1B_1C_1O_1$ with the paths of the bee along the mentioned faces, we will make sure that the lengths of the paths of the bee are equal. Let's calculate the length of the path, considering the length of the side of the hexagon equal to $a = 2\sqrt{\frac{7}{3}}$, the height of the prism equal to $h = \sqrt{7}$. Then $XY = \sqrt{(\frac{3}{4}a)^2 + (h + \frac{3\sqrt{3}}{4}a)^2} = 7$.

Solution (RUS). *Разбор варианта 1, остальные решаются аналогично.*
Пчела должна проползти по грани $ABCDEF$, по боковой поверхности призмы и по грани $A_1B_1C_1D_1E_1F_1$ – именно в таком порядке. Действительно, если пчела покинула грань $ABCDEF$ в точке P, а потом вернулась в эту грань через точку Q, то она проделала не кратчайший путь: кратчайший путь между точками выпуклого $ABCDEF$ тоже лежит в $ABCDEF$. Аналогично с $A_1B_1C_1D_1E_1F_1$.
Рассматривая развертки призмы, убедимся в том, что кратчайший путь пчелы между точками X и Y не выходит за пределы поверхности призмы $ABCOA_1B_1C_1O_1$ – значит, проходит по грани ABB_1A_1 или по грани BCC_1B_1. Рассмотрев развертки $ABCOA_1B_1C_1O_1$ с путями пчелы по упомянутым граням, убедимся в равенстве длин путей пчелы. Вычислим длину пути, считая длину стороны шестиугольника равной $a = 2\sqrt{\frac{7}{3}}$, высоту призмы равной $h = \sqrt{7}$. Тогда $XY = \sqrt{(\frac{3}{4}a)^2 + (h + \frac{3\sqrt{3}}{4}a)^2} = 7$.

Task 2.

1. Найдите наибольшее натуральное n, при котором выражение $\sqrt{n} + \sqrt{n+2021}$ принимает целое значение.

   Find the greatest integer n such that $\sqrt{n} + \sqrt{n+2021}$ is an integer.

Answer: 1020100

2. Найдите наибольшее натуральное n, при котором выражение $\sqrt{n}+\sqrt{n+979}$ принимает целое значение.

   Find the greatest integer n such that $\sqrt{n}+\sqrt{n+979}$ is an integer.

   Answer: 239121

3. Найдите наибольшее натуральное n, при котором выражение $\sqrt{n}+\sqrt{n+2479}$ принимает целое значение.

   Find the greatest integer n such that $\sqrt{n}+\sqrt{n+2479}$ is an integer.

   Answer: 1535121

4. Найдите наибольшее натуральное n, при котором выражение $\sqrt{n}+\sqrt{n+1537}$ принимает целое значение.

   Find the greatest integer n such that $\sqrt{n}+\sqrt{n+1537}$ is an integer.

   Answer: 589824

Solution (ENG). *Explaining the solution of the task 1, others are being solved similarly.*
Let $\sqrt{n}+\sqrt{n+2021}=m\in\mathbb{Z}$. Then $\sqrt{n+2021}=m-\sqrt{n}\Rightarrow m^2-2021=2m\sqrt{n}\Rightarrow\sqrt{n}=\frac{m^2-2021}{2m}=\frac{1}{2}(m-\frac{2021}{m})$.
The last expression must be non-negative integer – thus, m is a divisor of $2021=43\cdot47$. Obviously the greatest n will be for $m=2021$: $n=\frac{1}{4}(2021-1)^2=1020100$.

Solution (RUS). *Разбор варианта 1, остальные решаются аналогично.*
Пусть $\sqrt{n}+\sqrt{n+2021}=m\in\mathbb{Z}$. Далее $\sqrt{n+2021}=m-\sqrt{n}\Rightarrow m^2-2021=2m\sqrt{n}\Rightarrow\sqrt{n}=\frac{m^2-2021}{2m}=\frac{1}{2}(m-\frac{2021}{m})$.
Последнее выражение должно принимать целое неотрицательное значение – значит, m – делитель числа $2021=43\cdot47$. Очевидно, наибольшее n достигается при $m=2021$: $n=\frac{1}{4}(2021-1)^2=1020100$.

Task 3.

1. Есть лист бумаги с нарисованной сеткой $N\times N$ квадратных клеток. Известно, что на нем можно нарисовать 11025 попарно несовпадающих прямоугольников, стороны которых совпадают с линиями сетки (прямоугольники могут пересекаться друг с другом). Найдите наименьшее возможное N.

   There is a sheet of paper with a grid of $N\times N$ squares drawn. It is known that there is possible to select 11025 pairwise mismatched rectangles on this sheet with their sides lying on the grid (the rectangles may intersect with some other ones). Find smallest possible N.

   Answer: 14

2. Есть лист бумаги с нарисованной сеткой $N\times N$ квадратных клеток. Известно, что на нем можно нарисовать 23409 попарно несовпадающих прямоугольников, стороны которых совпадают с линиями сетки (прямоугольники могут пересекаться друг с другом). Найдите наименьшее возможное N.

There is a sheet of paper with a grid of $N \times N$ squares drawn. It is known that there is possible to select 23409 pairwise mismatched rectangles on this sheet with their sides lying on the grid (the rectangles may intersect with some other ones). Find smallest possible N.

Answer: 17

3. Есть лист бумаги с нарисованной сеткой $N \times N$ квадратных клеток. Известно, что на нем можно нарисовать 18496 попарно несовпадающих прямоугольников, стороны которых совпадают с линиями сетки (прямоугольники могут пересекаться друг с другом). Найдите наименьшее возможное N.

   There is a sheet of paper with a grid of $N \times N$ squares drawn. It is known that there is possible to select 18496 pairwise mismatched rectangles on this sheet with their sides lying on the grid (the rectangles may intersect with some other ones). Find smallest possible N.

   Answer: 16

4. Есть лист бумаги с нарисованной сеткой $N \times N$ квадратных клеток. Известно, что на нем можно нарисовать 76176 попарно несовпадающих прямоугольников, стороны которых совпадают с линиями сетки (прямоугольники могут пересекаться друг с другом). Найдите наименьшее возможное N.

   There is a sheet of paper with a grid of $N \times N$ squares drawn. It is known that there is possible to select 76176 pairwise mismatched rectangles on this sheet with their sides lying on the grid (the rectangles may intersect with some other ones). Find smallest possible N.

   Answer: 23

Solution (ENG). See the solution of the task 3 for 8-9 degree.

Solution (RUS). См. решение задачи №3 для 8-9 кл.

Task 4.

1. Найдите последние четыре цифры десятичной записи числа

$$5^{5^{5^1}} + 5^{5^{5^2}} + \cdots + 5^{5^{5^{11}}}$$

   Запишите эти цифры в поле для ответа с сохранением их порядка без пробелов и других символов, т.е. в виде четырехзначного числа.

   Find the last 4 digits of the decimal notation of the number

$$5^{5^{5^1}} + 5^{5^{5^2}} + \cdots + 5^{5^{5^{11}}}$$

   Write these digits in the answer as a 4-digit number (keeping their order without spaces and any other characters).

   Answer: 4375

2. Найдите последние четыре цифры десятичной записи числа

$$5^{5^{5^1}} + 5^{5^{5^2}} + \cdots + 5^{5^{5^{14}}}$$

Запишите эти цифры в поле для ответа с сохранением их порядка без пробелов и других символов, т.е. в виде четырехзначного числа.

Find the last 4 digits of the decimal notation of the number

$$5^{5^{5^1}} + 5^{5^{5^2}} + \cdots + 5^{5^{5^{14}}}$$

Write these digits in the answer as a 4-digit number (keeping their order without spaces and any other characters).

Answer: 3750

3. Найдите последние четыре цифры десятичной записи числа

$$5^{5^{5^1}} + 5^{5^{5^2}} + \cdots + 5^{5^{5^{15}}}$$

Запишите эти цифры в поле для ответа с сохранением их порядка без пробелов и других символов, т.е. в виде четырехзначного числа.

Find the last 4 digits of the decimal notation of the number

$$5^{5^{5^1}} + 5^{5^{5^2}} + \cdots + 5^{5^{5^{15}}}$$

Write these digits in the answer as a 4-digit number (keeping their order without spaces and any other characters).

Answer: 6875

4. Найдите последние четыре цифры десятичной записи числа

$$5^{5^{5^1}} + 5^{5^{5^2}} + \cdots + 5^{5^{5^{18}}}$$

Запишите эти цифры в поле для ответа с сохранением их порядка без пробелов и других символов, т.е. в виде четырехзначного числа.

Find the last 4 digits of the decimal notation of the number

$$5^{5^{5^1}} + 5^{5^{5^2}} + \cdots + 5^{5^{5^{18}}}$$

Write these digits in the answer as a 4-digit number (keeping their order without spaces and any other characters).

Answer: 6250

Solution (ENG). See the solution of the task 4 for 8-9 degree.

Solution (RUS). См. решение задачи №4 для 8-9 кл.

Task 5.

1. Решите для $x > 1$:

$$\sqrt{x} + \sqrt[9]{x} = \sqrt[3]{x} + \sqrt[7]{x}$$

   Solve for $x > 1$:

$$\sqrt{x} + \sqrt[9]{x} = \sqrt[3]{x} + \sqrt[7]{x}$$

   Answer: $x \in \varnothing$

2. Решите для $x > 1$:

$$\sqrt{x} + \sqrt[11]{x} = \sqrt[5]{x} + \sqrt[9]{x}$$

   Solve for $x > 1$:

$$\sqrt{x} + \sqrt[11]{x} = \sqrt[5]{x} + \sqrt[9]{x}$$

   Answer: $x \in \varnothing$

3. Решите для $x > 1$:

$$\sqrt{x} + \sqrt[17]{x} = \sqrt[7]{x} + \sqrt[13]{x}$$

   Solve for $x > 1$:

$$\sqrt{x} + \sqrt[17]{x} = \sqrt[7]{x} + \sqrt[13]{x}$$

   Answer: $x \in \varnothing$

4. Решите для $x > 1$:

$$\sqrt{x} + \sqrt[21]{x} = \sqrt[5]{x} + \sqrt[17]{x}$$

   Solve for $x > 1$:

$$\sqrt{x} + \sqrt[21]{x} = \sqrt[5]{x} + \sqrt[17]{x}$$

   Answer: $x \in \varnothing$

Solution (ENG). *Explaining the solution of the task 1, others are being solved similarly.* Let's note: $t = \sqrt[126]{x} > 1$. Initial equation will transform to

$$t^{63} + t^{14} = t^{42} + t^{18} \Rightarrow t^{49} + 1 = t^{28} + t^4 \Rightarrow t^{49} - t^4 = t^{28} - 1 \Rightarrow t^4(t^{45} - 1) = t^{28} - 1$$

Because of $t > 1$ we have $t^4 > 1$ and $t^{45} > t^{28} \Rightarrow t^{45} - 1 > t^{28} - 1$ – thus, the equality $t^4(t^{45} - 1) = t^{28} - 1$ does not hold for $t > 1$ and initial equation has no roots.

In many solutions to this problem the participants of the Olympiad referred to the growth rate of functions represented by the left and right sides of the equality given. The statements «the function on the left-hand side of the equality grows faster» (it requires a proof) and then «therefore functions have at most one common point» (this also requires a proof) were widespread. If such a statement was not proven, then the solution is incomplete.

Solution (RUS). *Разбор варианта 1, остальные решаются аналогично.*
Введем обозначение: $t = \sqrt[126]{x} > 1$. Уравнение примет вид

$$t^{63} + t^{14} = t^{42} + t^{18} \Rightarrow t^{49} + 1 = t^{28} + t^4 \Rightarrow t^{49} - t^4 = t^{28} - 1 \Rightarrow t^4(t^{45} - 1) = t^{28} - 1$$

Поскольку $t > 1$, имеем $t^4 > 1$ и $t^{45} > t^{28} \Rightarrow t^{45} - 1 > t^{28} - 1$ – значит, равенство $t^4(t^{45} - 1) = t^{28} - 1$ невозможно для $t > 1$ и исходное уравнение не имеет корней.
Во многих решениях этой задачи участники олимпиады ссылались на скорость роста функций, представленных левой и правой частями равенства. Распространенным было утверждение «функция в левой части равенства растет быстрее» (оно нуждается в доказательстве) и далее «поэтому функции имеют не более одной общей точки» (это тоже нуждается в доказательстве). Если подобное утверждение не доказано, то решение является неполным.

Task 6.

1. Равносторонний треугольник со стороной 20 разделен линиями, параллельными его сторонам, на равносторонние треугольники со стороной 1, которые будут использоваться как игровые поля.
   На этой доске Анна и Борис играют в игру: Анна ходит первой – ставит фишку на одно из игровых полей (т.е. в один из треугольников со стороной 1). Далее, начиная с первого хода Бориса, игроки по очереди сдвигают фишку в соседнее по стороне игровое поле, при этом запрещено сдвигать фишку в поле, в котором она уже была. Проигрывает тот, кто не может сделать ход.
   Может ли кто-то из игроков гарантировать себе победу независимо от игры соперника?

   An equilateral triangle with a side 20 is divided by lines parallel to its sides into equilateral triangles with sides 1 (they will be used as playing fields).
   On this board, Anna and Boris play a game: Anna moves first, placing a piece on one of the playing fields (i.e. in one of the triangles with sides equal to 1). Then, starting from the first move of Boris, the players (in turn) move the piece to the adjacent playing field while it is forbidden to move the piece to the field where it has already been. The player who cannot make a move loses the game.
   Can any of the players guarantee a victory regardless of the opponent's moves?

   Answer: Anna has a winning strategy.

2. Равносторонний треугольник со стороной 30 разделен линиями, параллельными его сторонам, на равносторонние треугольники со стороной 1, которые будут использоваться как игровые поля.
   На этой доске Анна и Борис играют в игру: Анна ходит первой – ставит фишку на одно из игровых полей (т.е. в один из треугольников со стороной 1). Далее, начиная с первого хода Бориса, игроки по очереди сдвигают фишку в соседнее по стороне игровое поле, при этом запрещено сдвигать фишку в поле, в котором она уже была. Проигрывает тот, кто не может сделать ход.
   Может ли кто-то из игроков гарантировать себе победу независимо от игры соперника?

   An equilateral triangle with a side 30 is divided by lines parallel to its sides into equilateral triangles with sides 1 (they will be used as playing fields).
   On this board, Anna and Boris play a game: Anna moves first, placing a piece on one of the playing fields (i.e. in one of the triangles with sides equal to 1). Then, starting from the first move of Boris, the players (in turn) move the piece to the adjacent playing field while it is forbidden to move the piece to the field where it has already been. The player who cannot make a move loses the game.

Can any of the players guarantee a victory regardless of the opponent's moves?

Answer: Anna has a winning strategy.

3. Равносторонний треугольник со стороной 24 разделен линиями, параллельными его сторонам, на равносторонние треугольники со стороной 1, которые будут использоваться как игровые поля.
   На этой доске Анна и Борис играют в игру: Анна ходит первой – ставит фишку на одно из игровых полей (т.е. в один из треугольников со стороной 1). Далее, начиная с первого хода Бориса, игроки по очереди сдвигают фишку в соседнее по стороне игровое поле, при этом запрещено сдвигать фишку в поле, в котором она уже была. Проигрывает тот, кто не может сделать ход.
   Может ли кто-то из игроков гарантировать себе победу независимо от игры соперника?

   An equilateral triangle with a side 24 is divided by lines parallel to its sides into equilateral triangles with sides 1 (they will be used as playing fields).
   On this board, Anna and Boris play a game: Anna moves first, placing a piece on one of the playing fields (i.e. in one of the triangles with sides equal to 1). Then, starting from the first move of Boris, the players (in turn) move the piece to the adjacent playing field while it is forbidden to move the piece to the field where it has already been. The player who cannot make a move loses the game.
   Can any of the players guarantee a victory regardless of the opponent's moves?

   Answer: Anna has a winning strategy.

4. Равносторонний треугольник со стороной 28 разделен линиями, параллельными его сторонам, на равносторонние треугольники со стороной 1, которые будут использоваться как игровые поля.
   На этой доске Анна и Борис играют в игру: Анна ходит первой – ставит фишку на одно из игровых полей (т.е. в один из треугольников со стороной 1). Далее, начиная с первого хода Бориса, игроки по очереди сдвигают фишку в соседнее по стороне игровое поле, при этом запрещено сдвигать фишку в поле, в котором она уже была. Проигрывает тот, кто не может сделать ход.
   Может ли кто-то из игроков гарантировать себе победу независимо от игры соперника?

   An equilateral triangle with a side 28 is divided by lines parallel to its sides into equilateral triangles with sides 1 (they will be used as playing fields).
   On this board, Anna and Boris play a game: Anna moves first, placing a piece on one of the playing fields (i.e. in one of the triangles with sides equal to 1). Then, starting from the first move of Boris, the players (in turn) move the piece to the adjacent playing field while it is forbidden to move the piece to the field where it has already been. The player who cannot make a move loses the game.
   Can any of the players guarantee a victory regardless of the opponent's moves?

   Answer: Anna has a winning strategy.

Solution (ENG). *Explaining the solution of the task 1, others are being solved similarly.*
We will consider one of the sides of the game board as horizontal, and its opposite vertex – as lying above the side. Let's prove that Anna has a winning strategy.
On her first move Anna must place the piece on the field that is farthest from the horizontal side of the board. After each of Boris's moves she will make a move to the «left». Let's prove that with such a

strategy Anna will always have a move. Then she will obviously win, since the number of moves in the game is finite.
Let's cut off (with a line parallel to the «left» side of the board) a «thick» layer of one equilateral triangle with side 1. This layer will contain 39 small triangles including the one farthest from the horizontal side of the board. We split all these triangles (except for the top one) into pairs of side-adjacent and forming rhombs with side 1 and corners 60° and 120°.
With his first move Boris will enter the first rhomb, after which Anna will enter the second triangle of this rhomb. After that Boris will have only one option: to enter the next rhomb, after which Anna will enter the second triangle of this rhomb, and so on. With her last move, Anna will enter the lower left triangle of the board, from where Boris will have no move, and he will lose.

Solution (RUS). *Разбор варианта 1, остальные решаются аналогично.*
Для удобства будем считать одну из сторон игровой доски горизонтальной, а не примыкающую к ней вершину – лежащей выше этой стороны. Докажем, что у Анны есть выигрышная стратегия. Первым ходом Анна должна поставить фишку в игровое поле, наиболее удаленное от горизонтальной стороны доски. После каждого хода Бориса она будет делать ход «левее». Докажем, что при такой стратегии у Анны всегда будет ход. Тогда, очевидно, она выиграет, поскольку количество ходов в игре конечно.
Отрежем линией, параллельной «левой» стороне доски, слой «толщиной» в один равносторонний треугольник со стороной 1. В этом слое будет 39 маленьких треугольников, включая самый удаленный от горизонтальной стороны доски. Разобьем все эти треугольники (кроме верхнего) на пары смежных по стороне и образующих ромб со стороной 1 и углами 60° и 120°.
Первым своим ходом Борис зайдет в первый ромб, после чего Анна зайдет во второй треугольник этого ромба. После этого у Бориса будет лишь один вариант – войти в следующий ромб, после чего Анна зайдет во второй треугольник этого ромба, и т.д. Своим последним ходом Анна зайдет в нижний левый треугольник доски, откуда у Бориса не будет хода, и он проиграет.