Каждый участник получает комплект из 6 задач, при этом каждая из них случайным образом выбирается из 4-х вариантов.
Первые 4 задачи подразумевают краткий ответ в виде целого числа или десятичной дроби, округленной до сотых. Задачи под номерами 5 и 6 требуют развернутого решения и (если это предусмотрено условием) ответа.

7^{th} degree

Task 1.

1. Найдите произведение натуральных чисел x и y, удовлетворяющих равенству:

$$4\frac{2}{x} \cdot y\frac{1}{3} = 10$$

(выражение вида $a\frac{b}{c}$ обозначает $a + \frac{b}{c}$)

Find $x \cdot y$ while x and y are positive integers satisfying the equality:

$$4\frac{2}{x} \cdot y\frac{1}{3} = 10$$

(expression like $a\frac{b}{c}$ means $a + \frac{b}{c}$)

Answer: 14

2. Найдите произведение натуральных чисел x и y, удовлетворяющих равенству:

$$2\frac{1}{x} \cdot y\frac{1}{5} = 8$$

(выражение вида $a\frac{b}{c}$ обозначает $a + \frac{b}{c}$)

Find $x \cdot y$ while x and y are positive integers satisfying the equality:

$$2\frac{1}{x} \cdot y\frac{1}{5} = 8$$

(expression like $a\frac{b}{c}$ means $a + \frac{b}{c}$)

Answer: 6

3. Найдите произведение натуральных чисел x и y, удовлетворяющих равенству:

$$4\frac{2}{x} \cdot y\frac{1}{7} = 10$$

(выражение вида $a\frac{b}{c}$ обозначает $a + \frac{b}{c}$)

Find $x \cdot y$ while x and y are positive integers satisfying the equality:

$$4\frac{2}{x} \cdot y\frac{1}{7} = 10$$

(expression like $a\frac{b}{c}$ means $a + \frac{b}{c}$)

Answer: 6

4. Найдите произведение натуральных чисел x и y, удовлетворяющих равенству:

$$5\frac{1}{x} \cdot y\frac{1}{11} = 6$$

(выражение вида $a\frac{b}{c}$ обозначает $a+\frac{b}{c}$)

Find $x \cdot y$ while x and y are positive integers satisfying the equality:

$$5\tfrac{1}{x} \cdot y\tfrac{1}{11} = 6$$

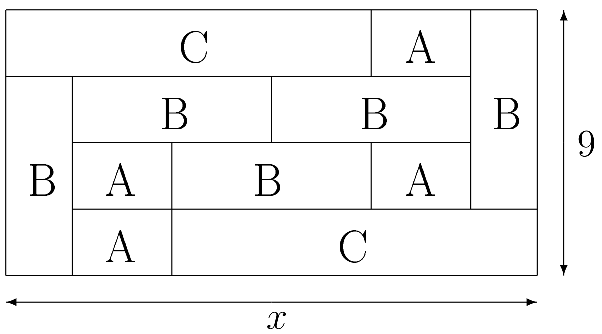
(expression like $a\frac{b}{c}$ means $a+\frac{b}{c}$)

Answer: 2

Solution (ENG). *Explaining the solution of the 1st version of the task, the others are solved similarly.*
If $y \geq 3$ then $4\frac{2}{x} \cdot y\frac{1}{3} > 4\frac{2}{x} \cdot y > 4y \geq 12 > 10$. If $y = 1$ then $4\frac{2}{x} = \frac{15}{2}$, which is impossible for positive integer x. Thus, $y = 2$. So, $x = 7$ and $x \cdot y = 14$.

Solution (RUS). *Разбор варианта №1, остальные решаются аналогично.*
Если $y \geq 3$, то $4\frac{2}{x} \cdot y\frac{1}{3} > 4\frac{2}{x} \cdot y > 4y \geq 12 > 10$. Если $y = 1$, то $4\frac{2}{x} = \frac{15}{2}$, то невозможно для натуральных x. Значит, $y = 2$. Отсюда легко находим $x = 7$ и $x \cdot y = 14$.

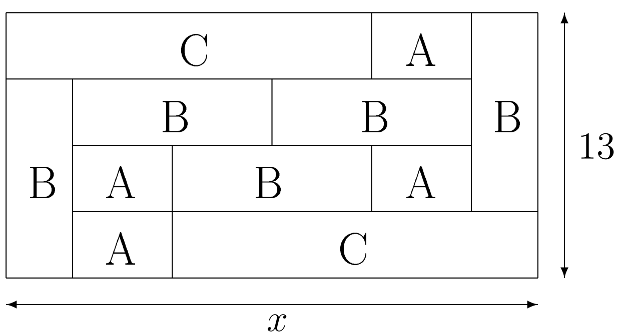
Task 2.

1. 

   На рисунке (см. выше) изображен большой прямоугольник, разделенный на меньшие прямоугольники трех типов (A, B, C), причем любые два прямоугольника одного типа равны между собой. Меньшая сторона большого прямоугольника равна 9. Найдите его большую сторону x.

   The picture (see it above) shows a large rectangle divided into smaller rectangles of three types (A, B, C) such that any two rectangles of the same type are equal to each other. The smaller side of the large rectangle is 9. Find its larger side x.

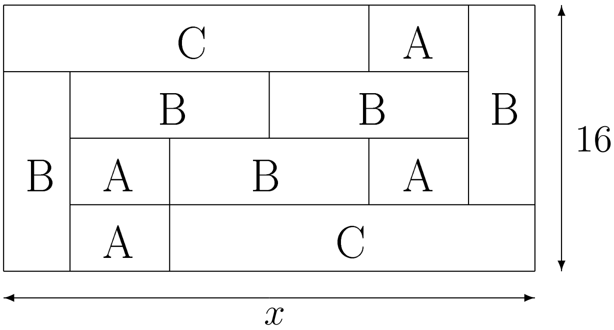
   Answer: 18

2. 

   На рисунке (см. выше) изображен большой прямоугольник, разделенный на меньшие прямоугольники трех типов (A, B, C), причем любые два прямоугольника одного типа равны между собой. Меньшая сторона большого прямоугольника равна 13. Найдите его большую сторону x.

The picture (see it above) shows a large rectangle divided into smaller rectangles of three types (A, B, C) such that any two rectangles of the same type are equal to each other. The smaller side of the large rectangle is 13. Find its larger side x.

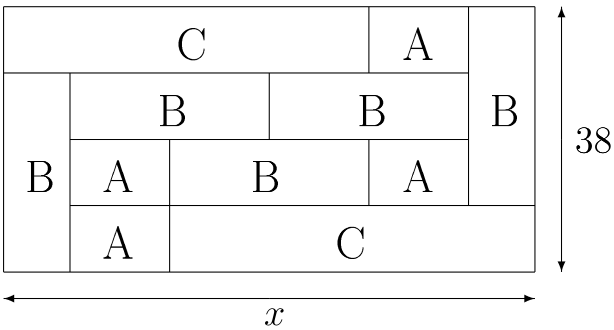
Answer: 26



3. На рисунке (см. выше) изображен большой прямоугольник, разделенный на меньшие прямоугольники трех типов (A, B, C), причем любые два прямоугольника одного типа равны между собой. Меньшая сторона большого прямоугольника равна 16. Найдите его большую сторону x.

The picture (see it above) shows a large rectangle divided into smaller rectangles of three types (A, B, C) such that any two rectangles of the same type are equal to each other. The smaller side of the large rectangle is 16. Find its larger side x.

Answer: 32



4. На рисунке (см. выше) изображен большой прямоугольник, разделенный на меньшие прямоугольники трех типов (A, B, C), причем любые два прямоугольника одного типа равны между собой. Меньшая сторона большого прямоугольника равна 38. Найдите его большую сторону x.

The picture (see it above) shows a large rectangle divided into smaller rectangles of three types (A, B, C) such that any two rectangles of the same type are equal to each other. The smaller side of the large rectangle is 38. Find its larger side x.

Answer: 76

Solution (ENG). *Explaining the solution of the 1st version of the task, the others are solved similarly.*
Let sides of rectangles A be equal to a, b, sides of rectangles C be equal to a, c. Thus, sides of rectangles

B are equal to $a, 2b$. Then we get system of the equations:

$$\begin{cases} a + 2b = 9 \\ 3a = 2b \\ c + b = a + 4b \\ a + b + c = x \end{cases}$$

By solving it we get $x = 2 \cdot 9 = 18$.

Solution (RUS). *Разбор варианта №1, остальные решаются аналогично.*
Пусть стороны прямоугольника A равны a, b, стороны прямоугольника C – a, c. Тогда стороны прямоугольника B равны $a, 2b$. Получим систему уравнений:

$$\begin{cases} a + 2b = 9 \\ 3a = 2b \\ c + b = a + 4b \\ a + b + c = x \end{cases}$$

Решая систему, найдем $x = 2 \cdot 9 = 18$.

Task 3.

1. Четырёхпалые мемцы делят свои сутки на 16 мемов, а каждый мем – на 64 мемасика. У них часы с круглым циферблатом; мемасиковая и мемная стрелки движутся в одном направлении, их начальные положения совпадают, за 1 мем мемасиковая стрелка совершает полный круг, а мемная стрелка совершает полный круг за сутки. Углы мемцы измеряют в мемасиках (1 мс $= \frac{360^\circ}{64}$). В каждом меме (нулевого мема нет, есть 16-й) счастливым считается момент, когда угол между стрелками равен 9 мс. Сколько всего счастливых моментов в сутках?

   Four-fingered creatures divide their day into 16 memes, and each meme into 64 meminutes. They have a clock with a round dial which is rounded by meme arrow in one day; the meme arrow and the meminute arrow move in the same direction with same initial positions; for 1 meme the meminute arrow makes a full circle. Those creatures measure angles in memasics (1 ms $= \frac{360^\circ}{64}$). In every meme (there are all memes from 1 to 16) the moment when the angle between the arrows is 9 ms is considered lucky. How many lucky moments are there in a day?

   Answer: 30

2. Восьмипалые мемцы делят свои сутки на 10 мемов, а каждый мем – на 80 мемасиков. У них часы с круглым циферблатом; мемасиковая и мемная стрелки движутся в одном направлении, их начальные положения совпадают, за 1 мем мемасиковая стрелка совершает полный круг, а мемная стрелка совершает полный круг за сутки. Углы мемцы измеряют в мемасиках (1 мс $= \frac{360^\circ}{80}$). В каждом меме (нулевого мема нет, есть 10-й) счастливым считается момент, когда угол между стрелками равен 17 мс. Сколько всего счастливых моментов в сутках?

   Eight-fingered creatures divide their day into 10 memes, and each meme into 80 meminutes. They have a clock with a round dial which is rounded by meme arrow in one day; the meme arrow and the meminute arrow move in the same direction with same initial positions; for 1 meme the meminute arrow makes a full circle. Those creatures measure angles in memasics (1 ms $= \frac{360^\circ}{80}$). In every meme (there are all memes from 1 to 10) the moment when the angle between the arrows is 17 ms is considered lucky. How many lucky moments are there in a day?

   Answer: 18

3. Шестипалые мемцы делят свои сутки на 14 мемов, а каждый мем – на 84 мемасика. У них часы с круглым циферблатом; мемасиковая и мемная стрелки движутся в одном направлении, их начальные положения совпадают, за 1 мем мемасиковая стрелка совершает полный круг, а мемная стрелка совершает полный круг за сутки. Углы мемцы измеряют в мемасиках (1 мс $= \frac{360^\circ}{84}$). В каждом меме (нулевого мема нет, есть 14-й) счастливым считается момент, когда угол между стрелками равен 13 мс. Сколько всего счастливых моментов в сутках?

   Six-fingered creatures divide their day into 14 memes, and each meme into 84 meminutes. They have a clock with a round dial which is rounded by meme arrow in one day; the meme arrow and the meminute arrow move in the same direction with same initial positions; for 1 meme the meminute arrow makes a full circle. Those creatures measure angles in memasics (1 ms $= \frac{360^\circ}{84}$). In every meme (there are all memes from 1 to 14) the moment when the angle between the arrows is 13 ms is considered lucky. How many lucky moments are there in a day?

   Answer: 26

4. Девятипалые мемцы делят свои сутки на 8 мемов, а каждый мем – на 72 мемасика. У них часы с круглым циферблатом; мемасиковая и мемная стрелки движутся в одном направлении, их начальные положения совпадают, за 1 мем мемасиковая стрелка совершает полный круг, а мемная стрелка совершает полный круг за сутки. Углы мемцы измеряют в мемасиках (1 мс $= \frac{360^\circ}{72}$). В каждом меме (нулевого мема нет, есть 8-й) счастливым считается момент, когда угол между стрелками равен 19 мс. Сколько всего счастливых моментов в сутках?

   Nine-fingered creatures divide their day into 8 memes, and each meme into 72 meminutes. They have a clock with a round dial which is rounded by meme arrow in one day; the meme arrow and the meminute arrow move in the same direction with same initial positions; for 1 meme the meminute arrow makes a full circle. Those creatures measure angles in memasics (1 ms $= \frac{360^\circ}{72}$). In every meme (there are all memes from 1 to 8) the moment when the angle between the arrows is 19 ms is considered lucky. How many lucky moments are there in a day?

   Answer: 14

Solution (ENG). *Explaining the solution of the 1st version of the task, the others are solved similarly.*
Note that the angle from the meme to the meminute arrows (with fixed direction) changes from $4(1-n)$ ms to $4n$ ms during each n-th meme; it is clear that this is 60ms, and not a full circle of 64ms. This means that the 3rd and 14th memes each have one lucky moment, and the rest have two lucky moments each. A total of 30 lucky moments.

Solution (RUS). *Разбор варианта №1, остальные решаются аналогично.*
Заметим, что угол от мемной стелки к мемасиковой (зафиксируем направление) меняется на протяжении каждого n-го мема от $4(1-n)$ мс до $4n$ мс.; понятно, что это 60мс., а не полный круг в 64мс. Значит, 3-й и 14-й мемы имеют по одному счастливому моменту, а остальные – по два. Итого 30 счастливых моментов.

Task 4.

1. Варя и Софья играют в игру: Варя пишет на доске натуральное N, потом Софья дописывает к нему справа 8 цифр. Если получился квадрат натурального числа, то Софья побеждает. При каком наименьшем N Софья не может победить?

   Barbara and Sophie play a game: Barbara writes positive integer N on the board, then Sophie adds 8 digits to it on the right. If they get a complete square of some integer, then Sophie wins. What is the smallest N such that Sophie cannot win?

Answer: 25010000

2. Варя и Софья играют в игру: Варя пишет на доске натуральное N, потом Софья дописывает к нему справа 4 цифры. Если получился квадрат натурального числа, то Софья побеждает. При каком наименьшем N Софья не может победить?

   Barbara and Sophie play a game: Barbara writes positive integer N on the board, then Sophie adds 4 digits to it on the right. If they get a complete square of some integer, then Sophie wins. What is the smallest N such that Sophie cannot win?

   Answer: 2600

3. Варя и Софья играют в игру: Варя пишет на доске натуральное N, потом Софья дописывает к нему справа 6 цифр. Если получился квадрат натурального числа, то Софья побеждает. При каком наименьшем N Софья не может победить?

   Barbara and Sophie play a game: Barbara writes positive integer N on the board, then Sophie adds 6 digits to it on the right. If they get a complete square of some integer, then Sophie wins. What is the smallest N such that Sophie cannot win?

   Answer: 251000

4. Варя и Софья играют в игру: Варя пишет на доске натуральное N, потом Софья дописывает к нему справа 10 цифр. Если получился квадрат натурального числа, то Софья побеждает. При каком наименьшем N Софья не может победить?

   Barbara and Sophie play a game: Barbara writes positive integer N on the board, then Sophie adds 10 digits to it on the right. If they get a complete square of some integer, then Sophie wins. What is the smallest N such that Sophie cannot win?

   Answer: 2500100000

Solution (ENG). *Explaining the solution of the 1st version of the task, the others are solved similarly.*
Let N be a number written by Barbara and M be a number consisting of digits added by Sophie. If there is a positive integer c such that $c^2 < 10^8 \cdot N$ and $(c+1)^2 \geq 10^9 \cdot N$, then Sophie cannot win: for any $0 \leq M < 10^8$ the number $\overline{NM} = 10^8 \cdot N + M$ will not be the square of any positive integer, since it will be enclosed between c^2 and $(c+1)^2$.
Note that $(c+1)^2 - c^2 = 2c+1$. Thus, if $2c+1 < 10^8$, then among any 10^8 consecutive positive integers less than $(c+1)^2$ there is a square of some integer. So, $c > 5 \cdot 10^7$ and $\overline{NM} > (5 \cdot 10^7)^2 = 25 \cdot 10^{14}$. Also $(5 \cdot 10^7 + 1)^2 = 2500000100000001 = 25 \cdot 10^{14} + 10^8 + 1$.
Next squares are $25000002 \cdot 10^8 + 1 + 3; 25000003 \cdot 10^8 + 1 + 3 + 5; \ldots$ etc. before $25009999 \cdot 10^8 + m_1 = 50009999^2$ after which we got $50010000^2 = 25010001 \cdot 10^8 + m_2$ for $m_1, m_2 < 10^8$.
So the number we are looking for is 25010000.

Solution (RUS). *Разбор варианта №1, остальные решаются аналогично.*
Пусть N – число, написанное Варей, а M – число, состоящее из цифр, дописанных Софьей. Если найдется натуральное c, такое, что $c^2 < 10^8 \cdot N$ и $(c+1)^2 \geq 10^9 \cdot N$, то Софья не сможет победить: при любом $0 \leq M < 10^8$ число $\overline{NM} = 10^8 \cdot N + M$ не будет квадратом натурального числа, поскольку будет заключено между c^2 и $(c+1)^2$.
Заметим, что $(c+1)^2 - c^2 = 2c+1$. Значит, если $2c+1 < 10^8$, то среди любых 10^8 подряд идущих натуральных чисел, меньших $(c+1)^2$, найдется квадрат натурального числа. Отсюда $c > 5 \cdot 10^7$ – значит, $\overline{NM} > (5 \cdot 10^7)^2 = 25 \cdot 10^{14}$. При этом $(5 \cdot 10^7 + 1)^2 = 2500000100000001 = 25 \cdot 10^{14} + 10^8 + 1$.
Последующие квадраты дают $25000002 \cdot 10^8 + 1 + 3; 25000003 \cdot 10^8 + 1 + 3 + 5; \ldots$ и т.д. вплоть

до $25009999 \cdot 10^8 + m_1 = 50009999^2$, после которого идет $50010000^2 = 25010001 \cdot 10^8 + m_2$ для $m_1, m_2 < 10^8$.
Таким образом, наименьшее искомое число – 25010000.

Task 5.

1. Баржу грузоподъёмностью 220 тонн хотят полностью загрузить контейнерами весом в 16 т и 7 т. Получится ли это сделать? Укажите все способы.

   There is a barge with a carrying capacity of 220 tons needed to be fully loaded with containers weighing 16 tons and 7 tons. Can this be done? Explain all the possible ways.

   Answer: 5×16 and 20×7, or 12×16 and 4×7.

2. Баржу грузоподъёмностью 220 тонн хотят полностью загрузить контейнерами весом в 18 т и 13 т. Получится ли это сделать? Укажите все способы.

   There is a barge with a carrying capacity of 220 tons needed to be fully loaded with containers weighing 18 tons and 13 tons. Can this be done? Explain all the possible ways.

   Answer: 5×18 and 10×13.

3. Баржу грузоподъёмностью 380 тонн хотят полностью загрузить контейнерами весом в 16 т и 7 т. Получится ли это сделать? Укажите все способы.

   There is a barge with a carrying capacity of 380 tons needed to be fully loaded with containers weighing 16 tons and 7 tons. Can this be done? Explain all the possible ways.

   Answer: 1×16 and 52×7, or 8×16 and 36×7, or 15×16 and 20×7, or 22×16 and 4×7.

4. Баржу грузоподъёмностью 380 тонн хотят полностью загрузить контейнерами весом в 18 т и 13 т. Получится ли это сделать? Укажите все способы.

   There is a barge with a carrying capacity of 380 tons needed to be fully loaded with containers weighing 18 tons and 13 tons. Can this be done? Explain all the possible ways.

   Answer: 11×18 and 14×13.

Solution (ENG). *Explaining the solution of the 1st version of the task, the others are solved similarly.*
Let x be the number of containers weighing 16 tons and y be the number of containers weighing 7 tons. Then $16x + 7y = 220 \Rightarrow y = \frac{1}{7}(220 - 16x)$. Since 220 gives a remainder of 3 when divided by 7 and y is an integer, therefore $16x$ also gives a remainder of 3 when divided by 7. Let's write out the remainders of x and $16x$ being divided by 7:

$x \pmod 7$	0	1	2	3	4	5	6
$16x \pmod 7$	0	2	4	6	1	3	5

Thus, x is a remainder of 5 when divided by 7 and $0 \le x \le \frac{220}{16} \in (13; 14)$. So the possible values of x are 5 or 12. Substituting them into the original equation, we get the corresponding values of y.

Solution (RUS). *Разбор варианта №1, остальные решаются аналогично.*
Пусть x – количество контейнеров весом 16 т, y – количество контейнеров весом 7 т.

Тогда $16x+7y=220 \Rightarrow y=\frac{1}{7}(220-16x)$. Поскольку 220 дает остаток 3 при делении на 7 и y – целое, значит, $16x$ тоже дает остаток 3 при делении на 7. Выпишем остатки при делении x и $16x$ на 7:

$x \pmod 7$	0	1	2	3	4	5	6
$16x \pmod 7$	0	2	4	6	1	3	5

Значит, x дает остаток 5 при делении на 7 и $0 \le x \le \frac{220}{16} \in (13;14)$. Отсюда возможные значения x – это 5 или 12. Подставляя их в исходное уравнение, получим соответствующие значения y.

Task 6.

1. Во время операции полиция обнаружила 2021 внешне одинаковые монеты, а также записку, в которой сказано, что 1011 монет настоящие, а остальные – фальшивые. Кроме того, в записке указано, что каждая фальшивая монета на один грамм легче любой настоящей.
   Эксперт по подделкам пришел с чашечными весами, которые не только показывают, какая чаша нагружена тяжелее, но и указывают разницу в весе грузов на чашах. Эксперт утверждает, что какую бы монету ни выбрала полиция, можно установить, настоящая она или фальшивая, сделав ровно одно взвешивание. Прав ли он?

   During the operation the police found 2021 outwardly identical coins, as well as a note stating that the 1011 of the coins were real, the rest ones were fake and each fake coin is one gram lighter than any real one.
   The expert came with a weighing scale that shows which bowl is heavier but also indicates the difference (in grams) of the weights on the bowls. The expert claims that whichever coin the police choose, he can determine whether it is real or fake by doing exactly one weighing. Is he right?

2. Во время операции полиция обнаружила 2021 внешне одинаковые монеты, а также записку, в которой сказано, что 501 монета настоящая, а остальные – фальшивые. Кроме того, в записке указано, что каждая фальшивая монета на один грамм легче любой настоящей.
   Эксперт по подделкам пришел с чашечными весами, которые не только показывают, какая чаша нагружена тяжелее, но и указывают разницу в весе грузов на чашах. Эксперт утверждает, что какую бы монету ни выбрала полиция, можно установить, настоящая она или фальшивая, сделав ровно одно взвешивание. Прав ли он?

   During the operation the police found 2021 outwardly identical coins, as well as a note stating that the 501 of the coins were real, the rest ones were fake and each fake coin is one gram lighter than any real one.
   The expert came with a weighing scale that shows which bowl is heavier but also indicates the difference (in grams) of the weights on the bowls. The expert claims that whichever coin the police choose, he can determine whether it is real or fake by doing exactly one weighing. Is he right?

3. Во время операции полиция обнаружила 2021 внешне одинаковые монеты, а также записку, в которой сказано, что 1010 монет настоящие, а остальные – фальшивые. Кроме того, в записке указано, что каждая фальшивая монета на один грамм легче любой настоящей.
   Эксперт по подделкам пришел с чашечными весами, которые не только показывают, какая чаша нагружена тяжелее, но и указывают разницу в весе грузов на чашах. Эксперт утверждает, что какую бы монету ни выбрала полиция, можно установить, настоящая она или фальшивая, сделав ровно одно взвешивание. Прав ли он?

   During the operation the police found 2021 outwardly identical coins, as well as a note stating that the 1010 of the coins were real, the rest ones were fake and each fake coin is one gram lighter than any real one.
   The expert came with a weighing scale that shows which bowl is heavier but also indicates the

difference (in grams) of the weights on the bowls. The expert claims that whichever coin the police choose, he can determine whether it is real or fake by doing exactly one weighing. Is he right?

4. Во время операции полиция обнаружила 2021 внешне одинаковые монеты, а также записку, в которой сказано, что 2000 монет настоящие, а остальные – фальшивые. Кроме того, в записке указано, что каждая фальшивая монета на один грамм легче любой настоящей.
Эксперт по подделкам пришел с чашечными весами, которые не только показывают, какая чаша нагружена тяжелее, но и указывают разницу в весе грузов на чашах. Эксперт утверждает, что какую бы монету ни выбрала полиция, можно установить, настоящая она или фальшивая, сделав ровно одно взвешивание. Прав ли он?

During the operation the police found 2021 outwardly identical coins, as well as a note stating that the 2000 of the coins were real, the rest ones were fake and each fake coin is one gram lighter than any real one.
The expert came with a weighing scale that shows which bowl is heavier but also indicates the difference (in grams) of the weights on the bowls. The expert claims that whichever coin the police choose, he can determine whether it is real or fake by doing exactly one weighing. Is he right?

Solution (ENG). To determine the authenticity of a coin it is enough to divide all coins (except for the one chosen by the police) into two equal parts and look at the difference in their weights. Let's prove that the authenticity of the chosen coin depends on the parity of this difference.
Indeed, let there be a fake coins on one bowl and b fake coins on the other. Then the difference shown by the balance is $|b-a|$ and has the same parity as the sum $a+b$. As a result of the weighing we find out the parity of the number of fake coins on the scales. Knowing the parity of the total number of fake coins we can immediately determine the authenticity of the coin that was chosen by the police. So the expert is right.

Solution (RUS). Для определения подлинности монеты достаточно разделить все монеты, кроме выбранной полицией, на две равные части и посмотреть на разность их весов. Докажем, что от четности этой разности зависит подлинность выбранной монеты.
Действительно, пусть на одной чаше находятся a фальшивых монет, а на другой – b фальшивых монет. Тогда разность, которую покажут весы, равна $|b-a|$ и имеет ту же четность, что и сумма $a+b$. Значит, мы в результате взвешивания мы узнаем четность числа фальшивых монет, находящихся на весах. Зная четность общего числа фальшивых монет, мы сразу определим подлинность той монеты, которой на весах не было (т.е. той, которую выбрала полиция). Значит, эксперт прав.

8-9 degree

Task 1.

1. Дан прямоугольник $ABCD$, на диагонали BD которого расположена точка E, из которой на стороны AB, BC, CD, DA опущены перпендикуляры EA_1, EB_1, EC_1, ED_1, соответственно. Найдите наибольшее значение суммы площадей AA_1ED_1 и CC_1EB_1, если площадь $ABCD$ равна 26.

   There is a rectangle $ABCD$ with point E on its diagonal BD. There are perpendiculars EA_1, EB_1, EC_1, ED_1 dropped to the sides AB, BC, CD, DA, respectively. Find the largest possible sum of the areas AA_1ED_1 and CC_1EB_1 while the area of $ABCD$ is 26.

   Answer: 13

2. Дан прямоугольник $ABCD$, на диагонали BD которого расположена точка E, из которой на стороны AB, BC, CD, DA опущены перпендикуляры EA_1, EB_1, EC_1, ED_1, соответственно. Найдите наибольшее значение суммы площадей AA_1ED_1 и CC_1EB_1, если площадь $ABCD$ равна 24.

   There is a rectangle $ABCD$ with point E on its diagonal BD. There are perpendiculars EA_1, EB_1, EC_1, ED_1 dropped to the sides AB, BC, CD, DA, respectively. Find the largest possible sum of the areas AA_1ED_1 and CC_1EB_1 while the area of $ABCD$ is 24.

   Answer: 12

3. Дан прямоугольник $ABCD$, на диагонали BD которого расположена точка E, из которой на стороны AB, BC, CD, DA опущены перпендикуляры EA_1, EB_1, EC_1, ED_1, соответственно. Найдите наибольшее значение суммы площадей AA_1ED_1 и CC_1EB_1, если площадь $ABCD$ равна 36.

   There is a rectangle $ABCD$ with point E on its diagonal BD. There are perpendiculars EA_1, EB_1, EC_1, ED_1 dropped to the sides AB, BC, CD, DA, respectively. Find the largest possible sum of the areas AA_1ED_1 and CC_1EB_1 while the area of $ABCD$ is 36.

   Answer: 18

4. Дан прямоугольник $ABCD$, на диагонали BD которого расположена точка E, из которой на стороны AB, BC, CD, DA опущены перпендикуляры EA_1, EB_1, EC_1, ED_1, соответственно. Найдите наибольшее значение суммы площадей AA_1ED_1 и CC_1EB_1, если площадь $ABCD$ равна 80.

   There is a rectangle $ABCD$ with point E on its diagonal BD. There are perpendiculars EA_1, EB_1, EC_1, ED_1 dropped to the sides AB, BC, CD, DA, respectively. Find the largest possible sum of the areas AA_1ED_1 and CC_1EB_1 while the area of $ABCD$ is 80.

   Answer: 40

Solution (ENG). Let lengths of the segments EA_1, EB_1, EC_1, ED_1 be equal to a, b, c, d, respectively, and lengths of the segments AD, AB be x, y.
Then

$$\begin{cases} ab = xy - a(x-b) - b(y-a) \\ cd = xy - d(x-c) - c(y-d) \end{cases}$$

Expanding the brackets and subtracting one equation from the other, we get $ab = cd$. Thus, the problem is reduced to finding $2S$, where S is the maximum value of ab.

From the similarity of the triangles DD_1E and DAB we have $\frac{a}{y}=\frac{x-b}{x} \Rightarrow b=-a\frac{x}{y}+x \Rightarrow ab=-a^2\frac{x}{y}+ax$. We will consider the last expression as a function $f(a)$ with parameters x,y. The graph of the function is a parabola with a maximum of $\frac{xy}{4}$ for $a=\frac{y}{2}$.
So, $2S=\frac{xy}{2}$.

Solution (RUS). Пусть длины отрезков EA_1, EB_1, EC_1, ED_1 равны a,b,c,d соответственно, а длины отрезков AD, AB – x,y соответственно. Тогда

$$\begin{cases} ab = xy - a(x-b) - b(y-a) \\ cd = xy - d(x-c) - c(y-d) \end{cases}$$

Раскрывая скобки и вычитая одно уравнение из другого, получим $ab=cd$. Значит, задача сводится к нахождению $2S$, где S – максимальное значение ab.
Из подобия треугольников DD_1E и DAB имеем $\frac{a}{y}=\frac{x-b}{x} \Rightarrow b=-a\frac{x}{y}+x \Rightarrow ab=-a^2\frac{x}{y}+ax$. Будем рассматривать последнее выражение как функцию $f(a)$ с параметрами x,y. График этой функции – парабола с максимумом $\frac{xy}{4}$ при $a=\frac{y}{2}$.
Значит, $2S=\frac{xy}{2}$.

Task 2.

1. Найдите наименьшее натуральное n, при котором число $\sqrt{41+\sqrt{n}}+\sqrt{41-\sqrt{n}}$ является целым.

   Find smallest positive integer n such that $\sqrt{41+\sqrt{n}}+\sqrt{41-\sqrt{n}}$ is an integer.

   Answer: 720

2. Найдите наименьшее натуральное n, при котором число $\sqrt{51+\sqrt{n}}+\sqrt{51-\sqrt{n}}$ является целым.

   Find smallest positive integer n such that $\sqrt{51+\sqrt{n}}+\sqrt{51-\sqrt{n}}$ is an integer.

   Answer: 392

3. Найдите наименьшее натуральное n, при котором число $\sqrt{67+\sqrt{n}}+\sqrt{67-\sqrt{n}}$ является целым.

   Find smallest positive integer n such that $\sqrt{67+\sqrt{n}}+\sqrt{67-\sqrt{n}}$ is an integer.

   Answer: 768

4. Найдите наименьшее натуральное n, при котором число $\sqrt{135+\sqrt{n}}+\sqrt{135-\sqrt{n}}$ является целым.

   Find smallest positive integer n such that $\sqrt{135+\sqrt{n}}+\sqrt{135-\sqrt{n}}$ is an integer.

   Answer: 6776

Solution (ENG). *Explaining the solution of the 1st version of the task, the others are solved similarly.*
Let $\sqrt{41+\sqrt{n}}+\sqrt{41-\sqrt{n}}=c\in\mathbb{Z}$ with $c>0$. We have $c^2=82+2\sqrt{41^2-n}<162$ because of $n>0$. The smaller is n, the bigger is c – therefore we must find biggest possible c such that $c^2<162$ for some positive integer n. Thus, $c^2=144 \Rightarrow c=12$, then we have $2\sqrt{41^2-n}=62 \Rightarrow \sqrt{41^2-n}=31 \Rightarrow 41^2-n=31^2 \Rightarrow n=720$.

Solution (RUS). *Разбор варианта №1, остальные решаются аналогично.*
Пусть $\sqrt{41+\sqrt{n}}+\sqrt{41-\sqrt{n}} = c \in \mathbb{Z}$, причем $c > 0$. Значит, $c^2 = 82 + 2\sqrt{41^2-n} < 162$, т.к. $n > 0$. Чем меньше n, тем больше c – значит, задача сводится к поиску наибольшего возможного c, такого, что $c^2 < 162$ и n – натуральное. Значит, $c^2 = 144 \Rightarrow c = 12$: тогда $2\sqrt{41^2-n} = 62 \Rightarrow \sqrt{41^2-n} = 31 \Rightarrow 41^2 - n = 31^2 \Rightarrow n = 720$.

Task 3.

1. Назовем *разбиением* натурального числа n его представление в виде суммы натуральных слагаемых, при этом разбиения, отличающиеся только порядком слагаемых, будем считать различными. Например, одним из разбиений числа 7 является выражение $1+3+2+1$.
   Пусть $F(n)$ – количество всех различных разбиений числа n.
   Решите уравнение: $F(n) = 128$.

   Let's call the *partition* of a positive integer n its representation as a sum of positive integers, while partitions that differ only in the order of terms will be considered different. For example, one of the partitions of the number 7 is the expression $1+3+2+1$.
   Let $F(n)$ be the number of all different partitions of a number n.
   Solve the equation: $F(n) = 128$.

   Answer: 8

2. Назовем *разбиением* натурального числа n его представление в виде суммы натуральных слагаемых, при этом разбиения, отличающиеся только порядком слагаемых, будем считать различными. Например, одним из разбиений числа 7 является выражение $1+3+2+1$.
   Пусть $F(n)$ – количество всех различных разбиений числа n.
   Решите уравнение: $F(n) = 512$.

   Let's call the *partition* of a positive integer n its representation as a sum of positive integers, while partitions that differ only in the order of terms will be considered different. For example, one of the partitions of the number 7 is the expression $1+3+2+1$.
   Let $F(n)$ be the number of all different partitions of a number n.
   Solve the equation: $F(n) = 512$.

   Answer: 10

3. Назовем *разбиением* натурального числа n его представление в виде суммы натуральных слагаемых, при этом разбиения, отличающиеся только порядком слагаемых, будем считать различными. Например, одним из разбиений числа 7 является выражение $1+3+2+1$.
   Пусть $F(n)$ – количество всех различных разбиений числа n.
   Решите уравнение: $F(n) = 1024$.

   Let's call the *partition* of a positive integer n its representation as a sum of positive integers, while partitions that differ only in the order of terms will be considered different. For example, one of the partitions of the number 7 is the expression $1+3+2+1$.
   Let $F(n)$ be the number of all different partitions of a number n.
   Solve the equation: $F(n) = 1024$.

   Answer: 11

4. Назовем *разбиением* натурального числа n его представление в виде суммы натуральных слагаемых, при этом разбиения, отличающиеся только порядком слагаемых, будем считать различными. Например, одним из разбиений числа 7 является выражение $1+3+2+1$.
   Пусть $F(n)$ – количество всех различных разбиений числа n.

Решите уравнение: $F(n) = 16384$.

Let's call the *partition* of a positive integer n its representation as a sum of positive integers, while partitions that differ only in the order of terms will be considered different. For example, one of the partitions of the number 7 is the expression $1+3+2+1$.
Let $F(n)$ be the number of all different partitions of a number n.
Solve the equation: $F(n) = 16384$.

Answer: 15

Solution (ENG). *Explaining the solution of the 1st version of the task, the others are solved similarly.*
Let's find the number of partitions of the positive integer n. To do that we represent it in the form $1+1+\cdots+1$ – a notion consisting of n «ones» and $n-1$ pluses. Each partition corresponds to an arrangement instead of some (possibly none, and possibly all) pluses «separators» separating the terms of the partition. For example, for $n=6$ one of the partitions is constructed as follows:

$$1+1+1+1+1+1 \to 1+1 \mid 1 \mid 1+1+1 \to 2+1+3$$

This means that the number of partitions is equal to the number of ways to place separators in the amount from 0 to $n-1$. The number of ways to arrange k separators is equal to C_{n-1}^k. Thus, the number of partitions is $C_{n-1}^0 + C_{n-1}^1 + C_{n-1}^2 + \cdots + C_{n-1}^{n-2} + C_{n-1}^{n-1} = 2^{n-1}$. So, $F(n) = 2^{n-1}$.
$2^{n-1} = 128 \Rightarrow n = 8$.

Solution (RUS). *Разбор варианта №1, остальные решаются аналогично.*
Найдем количество разбиений натурального n. Для этого представим его в виде $1+1+\cdots+1$ – запись, состоящая из n единиц и $n-1$ плюсов. Каждому разбиению соответствует расстановка вместо некоторых (возможно, ни одного, а возможно, всех) плюсов «перегородок», разделяющих слагаемые разбиения. Например, для $n=6$ одно из разбиений строится так:

$$1+1+1+1+1+1 \to 1+1 \mid 1 \mid 1+1+1 \to 2+1+3$$

Значит, количество разбиений равно количеству способов расставить вместо $n-1$ плюса перегородки в количестве от 0 до $n-1$. При этом количество способов расставить k перегородок равно C_{n-1}^k. Таким образом, количество разбиений равно $C_{n-1}^0 + C_{n-1}^1 + C_{n-1}^2 + \cdots + C_{n-1}^{n-2} + C_{n-1}^{n-1} = 2^{n-1}$.
Значит, $F(n) = 2^{n-1}$.
$2^{n-1} = 128 \Rightarrow n = 8$.

Task 4.

1. В треугольник $\triangle ABC$ с $AB = AC$ вписана окружность (назовем ее ω_0). Строится последовательность окружностей $\omega_0, \omega_1, \omega_2, \ldots$, причем каждая следующая имеет меньший радиус, чем предыдущая, и касается ее (в частности, ω_1 касается ω_0) и сторон угла $\angle A$. Известно, что $\cos \frac{\angle A}{2} = \frac{8}{5\pi}$.
   Пусть Ω – объединение множеств точек, лежащих внутри окружностей $\omega_0, \omega_1, \omega_2, \ldots$. Найдите вероятность того, что точка, случайным образом выбранная внутри $\triangle ABC$, содержится в Ω. Ответ округлите до сотых.

   A circle (let's call it ω_0) is inscribed in a triangle $\triangle ABC$ with $AB = AC$. A sequence of circles $\omega_0, \omega_1, \omega_2, \ldots$ is constructed such that each next circle has a smaller radius than the previous one and touches it (in particular, ω_1 touches ω_0) and the sides of the angle $\angle A$. It is known that $\cos \frac{\angle A}{2} = \frac{8}{5\pi}$.
   Let Ω be the union of the sets of points lying inside the circles $\omega_0, \omega_1, \omega_2, \ldots$. Find the probability that a point randomly selected inside the $\triangle ABC$ lies in Ω. Round your answer to two decimals.

Answer: 0.4

2. В треугольник $\triangle ABC$ с $AB = AC$ вписана окружность (назовем ее ω_0). Строится последовательность окружностей $\omega_0, \omega_1, \omega_2, \ldots$, причем каждая следующая имеет меньший радиус, чем предыдущая, и касается ее (в частности, ω_1 касается ω_0) и сторон угла $\angle A$. Известно, что $\cos\frac{\angle A}{2} = \frac{14}{5\pi}$.
Пусть Ω – объединение множеств точек, лежащих внутри окружностей $\omega_0, \omega_1, \omega_2, \ldots$. Найдите вероятность того, что точка, случайным образом выбранная внутри $\triangle ABC$, содержится в Ω. Ответ округлите до сотых.

A circle (let's call it ω_0) is inscribed in a triangle $\triangle ABC$ with $AB = AC$. A sequence of circles $\omega_0, \omega_1, \omega_2, \ldots$ is constructed such that each next circle has a smaller radius than the previous one and touches it (in particular, ω_1 touches ω_0) and the sides of the angle $\angle A$. It is known that $\cos\frac{\angle A}{2} = \frac{14}{5\pi}$.
Let Ω be the union of the sets of points lying inside the circles $\omega_0, \omega_1, \omega_2, \ldots$. Find the probability that a point randomly selected inside the $\triangle ABC$ lies in Ω. Round your answer to two decimals.

Answer: 0.7

3. В треугольник $\triangle ABC$ с $AB = AC$ вписана окружность (назовем ее ω_0). Строится последовательность окружностей $\omega_0, \omega_1, \omega_2, \ldots$, причем каждая следующая имеет меньший радиус, чем предыдущая, и касается ее (в частности, ω_1 касается ω_0) и сторон угла $\angle A$. Известно, что $\cos\frac{\angle A}{2} = \frac{3}{\pi}$.
Пусть Ω – объединение множеств точек, лежащих внутри окружностей $\omega_0, \omega_1, \omega_2, \ldots$. Найдите вероятность того, что точка, случайным образом выбранная внутри $\triangle ABC$, содержится в Ω. Ответ округлите до сотых.

A circle (let's call it ω_0) is inscribed in a triangle $\triangle ABC$ with $AB = AC$. A sequence of circles $\omega_0, \omega_1, \omega_2, \ldots$ is constructed such that each next circle has a smaller radius than the previous one and touches it (in particular, ω_1 touches ω_0) and the sides of the angle $\angle A$. It is known that $\cos\frac{\angle A}{2} = \frac{3}{\pi}$.
Let Ω be the union of the sets of points lying inside the circles $\omega_0, \omega_1, \omega_2, \ldots$. Find the probability that a point randomly selected inside the $\triangle ABC$ lies in Ω. Round your answer to two decimals.

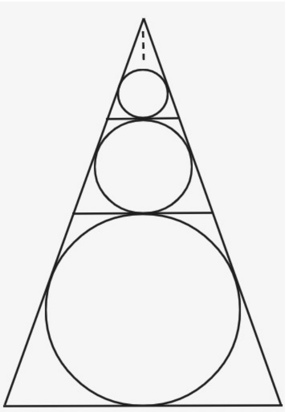
Answer: 0.75

4. В треугольник $\triangle ABC$ с $AB = AC$ вписана окружность (назовем ее ω_0). Строится последовательность окружностей $\omega_0, \omega_1, \omega_2, \ldots$, причем каждая следующая имеет меньший радиус, чем предыдущая, и касается ее (в частности, ω_1 касается ω_0) и сторон угла $\angle A$. Известно, что $\cos\frac{\angle A}{2} = \frac{5}{2\pi}$.
Пусть Ω – объединение множеств точек, лежащих внутри окружностей $\omega_0, \omega_1, \omega_2, \ldots$. Найдите вероятность того, что точка, случайным образом выбранная внутри $\triangle ABC$, содержится в Ω. Ответ округлите до сотых.

A circle (let's call it ω_0) is inscribed in a triangle $\triangle ABC$ with $AB = AC$. A sequence of circles $\omega_0, \omega_1, \omega_2, \ldots$ is constructed such that each next circle has a smaller radius than the previous one and touches it (in particular, ω_1 touches ω_0) and the sides of the angle $\angle A$. It is known that $\cos\frac{\angle A}{2} = \frac{5}{2\pi}$.
Let Ω be the union of the sets of points lying inside the circles $\omega_0, \omega_1, \omega_2, \ldots$. Find the probability that a point randomly selected inside the $\triangle ABC$ lies in Ω. Round your answer to two decimals.

Answer: 0.63

Solution (ENG). *Explaining the solution of the 1st version of the task, the others are solved similarly.*

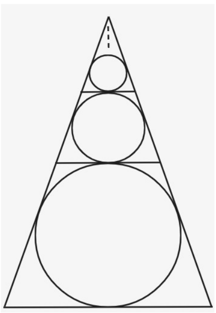


Let's draw lines parallel to BC and tangent to the constructed circles. These lines split the triangle ABC into an infinite number of isosceles similar (due to the equality of all angles and circumcision around the circle) trapezoids. Let's calculate the probability that a point dropped into one of these trapezoids will be inside the inscribed circle.
Let the bases of this trapezoid be x and y, the radius of the inscribed circle is R. The angle between the lateral side and the height of the trapezoid is $\frac{\angle A}{2}$. Then $\cos\frac{\angle A}{2} = \frac{2R}{1/2(x+y)}$ since the sum of the lengths of the bases is equal to twice the lateral side of the trapezoid (due to the existence of an inscribed circle). The desired probability is equal to the ratio of the area of the circle to the area of the trapezoid:

$$P = \frac{\pi R^2}{R(x+y)} = \frac{\pi}{4}\cos\frac{\angle A}{2}$$

The found probability is equal to the probability that is mentioned in the problem statement, since it depends only on the angle $\frac{\angle A}{2}$ and a point accidentally thrown into the triangle will be in one of the trapezoids, after which (with equal probability) will be inside a circle inscribed in a trapezoid.
Thus, $P = \frac{\pi}{4}\cdot\frac{8}{5\pi} = 0.4$.

Solution (RUS). *Разбор варианта №1, остальные решаются аналогично.*



Проведем прямые, параллельные BC и касающиеся построенных окружностей. Эти прямые разобьют треугольник ABC на бесконечное количество равнобедренных подобных (ввиду равенства всех углов и описанности вокруг окружности) трапеций. Вычислим вероятность того, что точка, попавшая в одну из этих трапеций, окажется внутри вписанной в нее окружности.
Пусть основания этой трапеции равны x и y, радиус вписанной окружности равен R. Угол между боковой стороной и высотой трапеции равен $\frac{\angle A}{2}$. Тогда $\cos\frac{\angle A}{2} = \frac{2R}{1/2(x+y)}$, поскольку сумма длин оснований равна удвоенной боковой стороне трапеции (ввиду существования вписанной окружности). Искомая вероятность равна отношению площади круга к площади трапеции:

$$P = \frac{\pi R^2}{R(x+y)} = \frac{\pi}{4}\cos\frac{\angle A}{2}$$

Найденная вероятность равна вероятности, о которой говорится в условии задачи, поскольку зависит только от угла $\frac{\angle A}{2}$: точка, случайно «брошенная» в треугольник, окажется в одной из трапеций, после чего с равной вероятностью окажется внутри вписанной в трапецию окружности.
Значит, $P = \frac{\pi}{4}\cdot\frac{8}{5\pi} = 0.4$.

Task 5.

1. Найдите две последние цифры числа $14^{2021}+15^{2021}$. Запишите эти цифры в ответ без пробелов, т.е. в виде двузначного числа.

   Find the last two digits of the number $14^{2021}+15^{2021}$. Represent your answer as two-digit number.

   Answer: 39

2. Найдите две последние цифры числа $14^{2022}+15^{2022}$. Запишите эти цифры в ответ без пробелов, т.е. в виде двузначного числа.

   Find the last two digits of the number $14^{2022}+15^{2022}$. Represent your answer as two-digit number.

   Answer: 21

3. Найдите две последние цифры числа $14^{2021^2}+15^{2021^2}$. Запишите эти цифры в ответ без пробелов, т.е. в виде двузначного числа.

   Find the last two digits of the number $14^{2021^2}+15^{2021^2}$. Represent your answer as two-digit number.

   Answer: 39

4. Найдите две последние цифры числа $14^{2022^2}+15^{2022^2}$. Запишите эти цифры в ответ без пробелов, т.е. в виде двузначного числа.

   Find the last two digits of the number $14^{2022^2}+15^{2022^2}$. Represent your answer as two-digit number.

   Answer: 41

Solution (ENG). *Explaining the solution of the 1st version of the task, the others are solved similarly.*
Let's write down the last two digits of the numbers 14^n and 15^n:

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
$14^n \pmod{100}$	14	96	44	16	24	36	04	56	84	76	64	96
$15^n \pmod{100}$	15	25	75	25	75	25	75	25	75	25	75	25

The last two digits of the numbers 14^n (from $n=2$) are repeating with a period of 10; the last two digits of the numbers 15^n (from $n=2$) are repeating with a period of 2. Thus, the last two digits of the numbers 14^n+15^n (from $n=2$) are repeating with a period of 10.
So, the last two digits of the number $14^{2021}+15^{2021}$ coincide with the last two digits of the number $14^{11}+15^{11}$, i.e. equal to 39.

Solution (RUS). *Разбор варианта №1, остальные решаются аналогично.*
Выпишем последние две цифры чисел 14^n и 15^n:

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
$14^n \pmod{100}$	14	96	44	16	24	36	04	56	84	76	64	96
$15^n \pmod{100}$	15	25	75	25	75	25	75	25	75	25	75	25

Две последние цифры чисел 14^n, начиная с $n = 2$, повторяются с периодом 10; две последние цифры чисел 15^n, начиная с $n = 2$, повторяются с периодом 2. Значит, две последние цифры чисел $14^n + 15^n$, начиная с $n = 2$, повторяются с периодом 10.
Таким образом, последние две цифры числа $14^{2021} + 15^{2021}$ совпадают с последними двумя цифрами числа $14^{11} + 15^{11}$, т.е. равны 39.

Task 6.

1. В языке ABAB словом называется любая последовательность букв A и B. Сколько существует различных слов этого языка, записываемых при помощи 15 букв, в которых содержатся 5 сочетаний AA и по 3 сочетания AB, BA и BB?
   Сочетанием букв здесь называется последовательность из двух букв, идущих подряд. Например, в слове ABAAB есть 4 сочетания букв: AB, BA, AA, AB.

   In the ABAB language any word is a sequence of letters A and B. Find number of different words of this language written with 15 letters and containing 5 combinations of AA, 3 combinations of AB, 3 combinations of BA and 3 combinations of BB.
   A combination of letters is a sequence of two letters written one-after-another. For example, in the word ABAAB there are 4 combinations of letters: AB, BA, AA, AB.

   Answer: 980

2. В языке ABAB словом называется любая последовательность букв A и B. Сколько существует различных слов этого языка, записываемых при помощи 19 букв, в которых содержатся 6 сочетаний AA и по 4 сочетания AB, BA и BB?
   Сочетанием букв здесь называется последовательность из двух букв, идущих подряд. Например, в слове ABAAB есть 4 сочетания букв: AB, BA, AA, AB.

   In the ABAB language any word is a sequence of letters A and B. Find number of different words of this language written with 19 letters and containing 6 combinations of AA, 4 combinations of AB, 4 combinations of BA and 4 combinations of BB.
   A combination of letters is a sequence of two letters written one-after-another. For example, in the word ABAAB there are 4 combinations of letters: AB, BA, AA, AB.

   Answer: 13230

3. В языке ABAB словом называется любая последовательность букв A и B. Сколько существует различных слов этого языка, записываемых при помощи 18 букв, в которых содержатся 5 сочетаний AA и по 4 сочетания AB, BA и BB?
   Сочетанием букв здесь называется последовательность из двух букв, идущих подряд. Например, в слове ABAAB есть 4 сочетания букв: AB, BA, AA, AB.

   In the ABAB language any word is a sequence of letters A and B. Find number of different words of this language written with 18 letters and containing 5 combinations of AA, 4 combinations of AB, 4 combinations of BA and 4 combinations of BB.
   A combination of letters is a sequence of two letters written one-after-another. For example, in the word ABAAB there are 4 combinations of letters: AB, BA, AA, AB.

   Answer: 8330

4. В языке ABAB словом называется любая последовательность букв A и B. Сколько существует различных слов этого языка, записываемых при помощи 17 букв, в которых содержатся 7 сочетаний AA и по 3 сочетания AB, BA и BB?
   Сочетанием букв здесь называется последовательность из двух букв, идущих подряд. Например, в слове ABAAB есть 4 сочетания букв: AB, BA, AA, AB.

In the ABAB language any word is a sequence of letters A and B. Find number of different words of this language written with 17 letters and containing 7 combinations of AA, 3 combinations of AB, 3 combinations of BA and 3 combinations of BB.
A combination of letters is a sequence of two letters written one-after-another. For example, in the word ABAAB there are 4 combinations of letters: AB, BA, AA, AB.

Answer: 1920

Solution (ENG). *Explaining the solution of the 1st version of the task, the others are solved similarly.*
Each letter of the word, except for the first and the last, is included in two combinations. Therefore, the total number of letters A from these combinations is either double their number in the word (if the first and last letters are not A), or double their number minus 1 (if exactly one letter A is on the edge), or double their number minus 2 (if the word starts and ends with A). The total number of letters A in two-letter combinations is 16, which means that the number of letters A in the word is either 8 or 9.
1) If there are 9 letters A in the word then the first and last letters are A. Let's call a *block* a group of identical letters in a row, which cannot be increased either from the left or from the right (for example, in the word AABBBBBA there are exactly 5 blocks: AA, BB, A, BBB, A). Each block of letters B begins with a combination of AB and ends with a combination of BA (remember that the first and last letters of the word are A), which means there are exactly 3 blocks with letters B (according to the number of combinations AB and BA).
The number of ways to split a sequence of 9 letters A by three blocks of letters B is equal to the number of ways to select three «gaps» between a pair of letters A from 8 «gaps», i.e. C_8^3.
The number of ways to distribute 6 letters B between these three blocks is equal to the number of ways to insert two partitions into the sequence of these letters with 5 «gaps» between them, i.e. C_5^2.
2) Similarly, if the number of letters A is 8, then the word begins and ends with B. There are three blocks of letters A and 3 positions in the word, where to insert these blocks into a sequence of 7 letters B – C_6^3 ways, and the number of ways to distribute the letters A between these three blocks is C_7^2.
So, the total number of words is $C_8^3 \cdot C_5^2 + C_6^3 \cdot C_7^2 = 980$.

Solution (RUS). *Разбор варианта №1, остальные решаются аналогично.*
Каждая буква слова, кроме первой и последней, входит в два сочетания. Поэтому общее количество букв А из этих сочетаний – это либо удвоенное их количество в слове (если первая и последняя буквы – не А), либо удвоенное их количество минус 1 (если ровно одна буква А стоит с краю), либо удвоенное их количество минус 2 (если слово начинается и заканчивается на А). Общее количество букв А в двухбуквенных сочетаниях равно 16 – значит, количество букв А в слове – либо 8, либо 9.
1) Если в слове 9 букв А, то первая и последние буквы слова – А. Назовем *блоком* группу одинаковых букв, идущих подряд, которую нельзя увеличить ни слева, ни справа (например, в слове AABBABBBA ровно 5 блоков: AA, BB, A, BBB, A). Тогда каждый блок букв B начинается с сочетания AB и заканчивается сочетанием BA (не забываем, что первая и последняя буквы слова - А) – значит, блоков с буквами B ровно 3 (по количеству сочетаний AB и BA).
Количество способов разбиения последовательности из 9 букв А тремя блоками букв B равно количеству способов выбрать три «зазора» между парой букв А из 8 «зазоров» , т.е. C_8^3.
Количество способов распределить 6 букв B между этими тремя блоками равно количеству способов вставить две перегородки в последовательность этих букв при 5 «зазорах» между ними, т.е. C_5^2.
2) Аналогично, если количество букв А равно 8, значит, слово начинается и заканчивается на B. В слове есть три блока букв А и 3 позиции, куда вставить эти блоки в последовательность из 7 букв B – C_6^3 способов, а количество способов распределить буквы А между этими тремя блоками равно C_7^2.
Итак, общее количество слов равно $C_8^3 \cdot C_5^2 + C_6^3 \cdot C_7^2 = 980$.

10-12 degree

Task 1.

1. В сосуд, имеющий форму прямого кругового конуса, наливают воду. Если сосуд установлен «острым» концом вниз, то расстояние от уровня воды до плоскости основания конуса равно 1 м. Когда сосуд перевернули, оказалось, что расстояние от уровня воды до «острого» конца сосуда равно $\sqrt[3]{4}$ м. Найдите высоту сосуда, ответ дайте в метрах, при необходимости округлив до сотых.
   Объем конуса может быть найден по формуле $V = \frac{1}{3}S \cdot h$, где S – площадь его основания, h – высота.

   Water is poured into a vessel of the form of a straight circular cone. If the vessel is installed with the «sharp» end down then the distance from the water level to the base of the cone is 1 m. When the vessel was turned over, it turned out that the distance from the water level to the «sharp» end of the vessel is $\sqrt[3]{4}$ m. Find the height of the vessel; give your answer in meters, rounded to two decimals if needed.
   The volume of a cone can be found by the formula $V = \frac{1}{3}S \cdot h$, where S is the area of its base and h is its height.

   Answer: 1.62

2. В сосуд, имеющий форму прямого кругового конуса, наливают воду. Если сосуд установлен «острым» концом вниз, то расстояние от уровня воды до плоскости основания конуса равно 1 м. Когда сосуд перевернули, оказалось, что расстояние от уровня воды до «острого» конца сосуда равно $\sqrt[3]{13}$ м. Найдите высоту сосуда, ответ дайте в метрах, при необходимости округлив до сотых.
   Объем конуса может быть найден по формуле $V = \frac{1}{3}S \cdot h$, где S – площадь его основания, h – высота.

   Water is poured into a vessel of the form of a straight circular cone. If the vessel is installed with the «sharp» end down then the distance from the water level to the base of the cone is 1 m. When the vessel was turned over, it turned out that the distance from the water level to the «sharp» end of the vessel is $\sqrt[3]{13}$ m. Find the height of the vessel; give your answer in meters, rounded to two decimals if needed.
   The volume of a cone can be found by the formula $V = \frac{1}{3}S \cdot h$, where S is the area of its base and h is its height.

   Answer: 2.56

3. В сосуд, имеющий форму прямого кругового конуса, наливают воду. Если сосуд установлен «острым» концом вниз, то расстояние от уровня воды до плоскости основания конуса равно 1 м. Когда сосуд перевернули, оказалось, что расстояние от уровня воды до «острого» конца сосуда равно $\sqrt[3]{28}$ м. Найдите высоту сосуда, ответ дайте в метрах, при необходимости округлив до сотых.
   Объем конуса может быть найден по формуле $V = \frac{1}{3}S \cdot h$, где S – площадь его основания, h – высота.

   Water is poured into a vessel of the form of a straight circular cone. If the vessel is installed with the «sharp» end down then the distance from the water level to the base of the cone is 1 m. When the vessel was turned over, it turned out that the distance from the water level to the «sharp» end of the vessel is $\sqrt[3]{28}$ m. Find the height of the vessel; give your answer in meters, rounded to two decimals if needed.

The volume of a cone can be found by the formula $V = \frac{1}{3}S \cdot h$, where S is the area of its base and h is its height.

Answer: 3.54

4. В сосуд, имеющий форму прямого кругового конуса, наливают воду. Если сосуд установлен «острым» концом вниз, то расстояние от уровня воды до плоскости основания конуса равно 1 м. Когда сосуд перевернули, оказалось, что расстояние от уровня воды до «острого» конца сосуда равно $\sqrt[3]{76}$ м. Найдите высоту сосуда, ответ дайте в метрах, при необходимости округлив до сотых.
   Объем конуса может быть найден по формуле $V = \frac{1}{3}S \cdot h$, где S – площадь его основания, h – высота.

   Water is poured into a vessel of the form of a straight circular cone. If the vessel is installed with the «sharp» end down then the distance from the water level to the base of the cone is 1 m. When the vessel was turned over, it turned out that the distance from the water level to the «sharp» end of the vessel is $\sqrt[3]{76}$ m. Find the height of the vessel; give your answer in meters, rounded to two decimals if needed.
   The volume of a cone can be found by the formula $V = \frac{1}{3}S \cdot h$, where S is the area of its base and h is its height.

   Answer: 5.52

Solution (ENG). *Explaining the solution of the 1st version of the task, the others are solved similarly.*
Let h be the height of the vessel, V_0 its volume, R the radius of the base, V the volume of water. If the vessel is installed with the «sharp» end down, then the water fills the cone with the height $h-1$ and the radius of the base $R_1 = \frac{h-1}{h}R$ (due to the similarity of the axial sections of the cones). After turning over, the water fills a truncated cone of height $h-x$ (here $x = \sqrt[3]{4}$) with base radii R and $R_2 = \frac{x}{h}R$.
Applying the cone volume formula, we get $h^3-(h-1)^3 = x^3$, thus $h = \frac{1}{2}(1+\sqrt{\frac{4}{3}x^3-\frac{1}{3}}) = \frac{1}{2}(1+\sqrt{5}) \approx 1.62$.

Solution (RUS). *Разбор варианта №1, остальные решаются аналогично.*
Пусть h – высота сосуда, V_0 – его объём, R – радиус основания, V – объём воды. Если сосуд установлен «острым» концом вниз, то вода заполняет конус высоты $h-1$ и радиусом основания $R_1 = \frac{h-1}{h}R$ (ввиду подобия осевых сечений конусов). После переворачивания вода заполняет усеченный конус высотой $h-x$ (здесь $x = \sqrt[3]{4}$) с радиусами оснований R и $R_2 = \frac{x}{h}R$.
Применяя формулу объёма конуса, получим $h^3-(h-1)^3 = x^3$, откуда $h = \frac{1}{2}(1+\sqrt{\frac{4}{3}x^3-\frac{1}{3}}) = \frac{1}{2}(1+\sqrt{5}) \approx 1.62$.

Task 2.

1. Варя и Софья играют в игру: Варя пишет на доске натуральное N, потом Софья дописывает к нему справа 8 цифр. Если получился квадрат натурального числа, то Софья побеждает. При каком наименьшем N Софья не может победить?

   Barbara and Sophie play a game: Barbara writes positive integer N on the board, then Sophie adds 8 digits to it on the right. If they get a complete square of some integer, then Sophie wins. What is the smallest N such that Sophie cannot win?

   Answer: 25010000

2. Варя и Софья играют в игру: Варя пишет на доске натуральное N, потом Софья дописывает к нему справа 4 цифры. Если получился квадрат натурального числа, то Софья побеждает. При каком наименьшем N Софья не может победить?

   Barbara and Sophie play a game: Barbara writes positive integer N on the board, then Sophie adds 4 digits to it on the right. If they get a complete square of some integer, then Sophie wins. What is the smallest N such that Sophie cannot win?

   Answer: 2600

3. Варя и Софья играют в игру: Варя пишет на доске натуральное N, потом Софья дописывает к нему справа 6 цифр. Если получился квадрат натурального числа, то Софья побеждает. При каком наименьшем N Софья не может победить?

   Barbara and Sophie play a game: Barbara writes positive integer N on the board, then Sophie adds 6 digits to it on the right. If they get a complete square of some integer, then Sophie wins. What is the smallest N such that Sophie cannot win?

   Answer: 251000

4. Варя и Софья играют в игру: Варя пишет на доске натуральное N, потом Софья дописывает к нему справа 10 цифр. Если получился квадрат натурального числа, то Софья побеждает. При каком наименьшем N Софья не может победить?

   Barbara and Sophie play a game: Barbara writes positive integer N on the board, then Sophie adds 10 digits to it on the right. If they get a complete square of some integer, then Sophie wins. What is the smallest N such that Sophie cannot win?

   Answer: 2500100000

Solution (ENG). See solution of the task 4 for 7^{th} degree.

Solution (RUS). См. решение задачи №4 для 7 кл.

Task 3.

1. В треугольник $\triangle ABC$ с $AB = AC$ вписана окружность (назовем ее ω_0). Строится последовательность окружностей $\omega_0, \omega_1, \omega_2, \ldots$, причем каждая следующая имеет меньший радиус, чем предыдущая, и касается ее (в частности, ω_1 касается ω_0) и сторон угла $\angle A$. Известно, что $\cos \frac{\angle A}{2} = \frac{8}{5\pi}$.
   Пусть Ω – объединение множеств точек, лежащих внутри окружностей $\omega_0, \omega_1, \omega_2, \ldots$. Найдите вероятность того, что точка, случайным образом выбранная внутри $\triangle ABC$, содержится в Ω. Ответ округлите до сотых.

   A circle (let's call it ω_0) is inscribed in a triangle $\triangle ABC$ with $AB = AC$. A sequence of circles $\omega_0, \omega_1, \omega_2, \ldots$ is constructed such that each next circle has a smaller radius than the previous one and touches it (in particular, ω_1 touches ω_0) and the sides of the angle $\angle A$. It is known that $\cos \frac{\angle A}{2} = \frac{8}{5\pi}$.
   Let Ω be the union of the sets of points lying inside the circles $\omega_0, \omega_1, \omega_2, \ldots$. Find the probability that a point randomly selected inside the $\triangle ABC$ lies in Ω. Round your answer to two decimals.

   Answer: 0.4

2. В треугольник $\triangle ABC$ с $AB = AC$ вписана окружность (назовем ее ω_0). Строится последовательность окружностей $\omega_0, \omega_1, \omega_2, \ldots$, причем каждая следующая имеет меньший радиус,

чем предыдущая, и касается ее (в частности, ω_1 касается ω_0) и сторон угла $\angle A$. Известно, что $\cos\frac{\angle A}{2}=\frac{14}{5\pi}$.
Пусть Ω – объединение множеств точек, лежащих внутри окружностей $\omega_0,\omega_1,\omega_2,\ldots$. Найдите вероятность того, что точка, случайным образом выбранная внутри $\triangle ABC$, содержится в Ω. Ответ округлите до сотых.

A circle (let's call it ω_0) is inscribed in a triangle $\triangle ABC$ with $AB=AC$. A sequence of circles $\omega_0,\omega_1,\omega_2,\ldots$ is constructed such that each next circle has a smaller radius than the previous one and touches it (in particular, ω_1 touches ω_0) and the sides of the angle $\angle A$. It is known that $\cos\frac{\angle A}{2}=\frac{14}{5\pi}$.
Let Ω be the union of the sets of points lying inside the circles $\omega_0,\omega_1,\omega_2,\ldots$. Find the probability that a point randomly selected inside the $\triangle ABC$ lies in Ω. Round your answer to two decimals.

Answer: 0.7

3. В треугольник $\triangle ABC$ с $AB=AC$ вписана окружность (назовем ее ω_0). Строится последовательность окружностей $\omega_0,\omega_1,\omega_2,\ldots$, причем каждая следующая имеет меньший радиус, чем предыдущая, и касается ее (в частности, ω_1 касается ω_0) и сторон угла $\angle A$. Известно, что $\cos\frac{\angle A}{2}=\frac{3}{\pi}$.
Пусть Ω – объединение множеств точек, лежащих внутри окружностей $\omega_0,\omega_1,\omega_2,\ldots$. Найдите вероятность того, что точка, случайным образом выбранная внутри $\triangle ABC$, содержится в Ω. Ответ округлите до сотых.

A circle (let's call it ω_0) is inscribed in a triangle $\triangle ABC$ with $AB=AC$. A sequence of circles $\omega_0,\omega_1,\omega_2,\ldots$ is constructed such that each next circle has a smaller radius than the previous one and touches it (in particular, ω_1 touches ω_0) and the sides of the angle $\angle A$. It is known that $\cos\frac{\angle A}{2}=\frac{3}{\pi}$.
Let Ω be the union of the sets of points lying inside the circles $\omega_0,\omega_1,\omega_2,\ldots$. Find the probability that a point randomly selected inside the $\triangle ABC$ lies in Ω. Round your answer to two decimals.

Answer: 0.75

4. В треугольник $\triangle ABC$ с $AB=AC$ вписана окружность (назовем ее ω_0). Строится последовательность окружностей $\omega_0,\omega_1,\omega_2,\ldots$, причем каждая следующая имеет меньший радиус, чем предыдущая, и касается ее (в частности, ω_1 касается ω_0) и сторон угла $\angle A$. Известно, что $\cos\frac{\angle A}{2}=\frac{5}{2\pi}$.
Пусть Ω – объединение множеств точек, лежащих внутри окружностей $\omega_0,\omega_1,\omega_2,\ldots$. Найдите вероятность того, что точка, случайным образом выбранная внутри $\triangle ABC$, содержится в Ω. Ответ округлите до сотых.

A circle (let's call it ω_0) is inscribed in a triangle $\triangle ABC$ with $AB=AC$. A sequence of circles $\omega_0,\omega_1,\omega_2,\ldots$ is constructed such that each next circle has a smaller radius than the previous one and touches it (in particular, ω_1 touches ω_0) and the sides of the angle $\angle A$. It is known that $\cos\frac{\angle A}{2}=\frac{5}{2\pi}$.
Let Ω be the union of the sets of points lying inside the circles $\omega_0,\omega_1,\omega_2,\ldots$. Find the probability that a point randomly selected inside the $\triangle ABC$ lies in Ω. Round your answer to two decimals.

Answer: 0.63

Solution (ENG). See solution of the task 4 for 8-9 degree.

Solution (RUS). См. решение задачи №4 для 8-9 кл.

Task 4.

1. Найдите количество пар $(x; y)$ натуральных чисел, являющихся решением уравнения
$$\frac{1}{x}+\frac{1}{y}=\frac{1}{2021^2}$$
Если $x \neq y$, то пары $(x; y)$ и $(y; x)$ считаются различными.

   Find the number of ordered pairs $(x; y)$ of positive integers satisfying
$$\frac{1}{x}+\frac{1}{y}=\frac{1}{2021^2}$$
If $x \neq y$ then pairs $(x; y)$ and $(y; x)$ are considered to be different.

   Answer: 25

2. Найдите количество пар $(x; y)$ натуральных чисел, являющихся решением уравнения
$$\frac{1}{x}+\frac{1}{y}=\frac{1}{2021^5}$$
Если $x \neq y$, то пары $(x; y)$ и $(y; x)$ считаются различными.

   Find the number of ordered pairs $(x; y)$ of positive integers satisfying
$$\frac{1}{x}+\frac{1}{y}=\frac{1}{2021^5}$$
If $x \neq y$ then pairs $(x; y)$ and $(y; x)$ are considered to be different.

   Answer: 121

3. Найдите количество пар $(x; y)$ натуральных чисел, являющихся решением уравнения
$$\frac{1}{x}+\frac{1}{y}=\frac{1}{2021^{11}}$$
Если $x \neq y$, то пары $(x; y)$ и $(y; x)$ считаются различными.

   Find the number of ordered pairs $(x; y)$ of positive integers satisfying
$$\frac{1}{x}+\frac{1}{y}=\frac{1}{2021^{11}}$$
If $x \neq y$ then pairs $(x; y)$ and $(y; x)$ are considered to be different.

   Answer: 529

4. Найдите количество пар $(x; y)$ натуральных чисел, являющихся решением уравнения
$$\frac{1}{x}+\frac{1}{y}=\frac{1}{2021^{17}}$$
Если $x \neq y$, то пары $(x; y)$ и $(y; x)$ считаются различными.

   Find the number of ordered pairs $(x; y)$ of positive integers satisfying
$$\frac{1}{x}+\frac{1}{y}=\frac{1}{2021^{17}}$$
If $x \neq y$ then pairs $(x; y)$ and $(y; x)$ are considered to be different.

   Answer: 1225

Solution (ENG). *Explaining the solution of the 1st version of the task, the others are solved similarly.*
Let's look at the equation (for positive integers x, y and positive integer parameter n):

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{1}{n}$$

$\frac{x+y}{xy} = \frac{1}{n} \Rightarrow xy - nx - ny = 0 \Rightarrow xy - nx - ny + n^2 = n^2 \Rightarrow (x-n)(y-n) = n^2$, while $x, y > n$.
Any solution (x, y) of the equations corresponds to ordered pair of positive integers (d_1, d_2) with $d_1 \cdot d_2 = n^2$. Number of those pairs equals to the number of divisors of n^2. Let's don't forget that number of divisors of $p_1^{k_1} p_2^{k_2} \cdot \dots \cdot p_m^{k_m}$ (for different primes p_i and positive integers k_i) equals to $(k_1+1)(k_2+1)\cdots(k_m+1)$.
Thus, the number of divisors of $2021^{2k} = 43^{2k} \cdot 47^{2k}$ is equal to $(2k+1)^2$. Therefore, the number of solutions of initial equation (i.e. for $k = 2$) equals to 25.

Solution (RUS). *Разбор варианта №1, остальные решаются аналогично.*
Рассмотрим уравнение в натуральных числах с натуральным параметром n:

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{1}{n}$$

$\frac{x+y}{xy} = \frac{1}{n} \Rightarrow xy - nx - ny = 0 \Rightarrow xy - nx - ny + n^2 = n^2 \Rightarrow (x-n)(y-n) = n^2$, где $x, y > n$.
Каждому решению (x, y) этого уравнения соответствует упорядоченная пара (d_1, d_2) натуральных чисел, для которых $d_1 \cdot d_2 = n^2$. Количество таких пар равно количеству делителей числа n^2. При этом количество делителей числа $p_1^{k_1} p_2^{k_2} \cdot \dots \cdot p_m^{k_m}$ (для различных простых p_i и натуральных k_i) равно $(k_1+1)(k_2+1)\cdots(k_m+1)$.
Количество делителей числа $2021^{2k} = 43^{2k} \cdot 47^{2k}$ равно $(2k+1)^2$. Значит, количество решений исходного уравнения (т.е. для $k = 2$) равно 25.

Task 5.

1. Опишите алгоритм построения (с помощью циркуля и линейки без делений) прямоугольного треугольника по гипотенузе и отношению катетов, равному $\frac{3}{4}$.
   С помощью циркуля можно проводить окружности произвольного либо заданного радиуса, а линейка позволяет проводить произвольную прямую, либо прямую, проходящую через одну или две заданные точки. Также можно отмечать произвольную точку плоскости (прямой, отрезка, окружности) и точки пересечения прямых и окружностей.

   Describe the algorithm of constructing (using a compass and a ruler) a right-angled triangle knowing its hypotenuse and the ratio of its legs being equal to $\frac{3}{4}$.
   With the help of a compass you can draw circles of arbitrary or given radius; the ruler allows you to draw an arbitrary straight line or a straight line passing through one or two given points. You can also mark an arbitrary point on the plane (or a straight line, or a segment, or a circle) and intersection points of straight lines and circles.

2. Опишите алгоритм построения (с помощью циркуля и линейки без делений) прямоугольного треугольника по гипотенузе и отношению катетов, равному $\sqrt{3}$.
   С помощью циркуля можно проводить окружности произвольного либо заданного радиуса, а линейка позволяет проводить произвольную прямую, либо прямую, проходящую через одну или две заданные точки. Также можно отмечать произвольную точку плоскости (прямой, отрезка, окружности) и точки пересечения прямых и окружностей.

   Describe the algorithm of constructing (using a compass and a ruler) a right-angled triangle knowing its hypotenuse and the ratio of its legs being equal to $\sqrt{3}$.

With the help of a compass you can draw circles of arbitrary or given radius; the ruler allows you to draw an arbitrary straight line or a straight line passing through one or two given points. You can also mark an arbitrary point on the plane (or a straight line, or a segment, or a circle) and intersection points of straight lines and circles.

3. Опишите алгоритм построения (с помощью циркуля и линейки без делений) треугольника по радиусу вписанной окружности и отношению длин сторон, равному $4:5:7$.
С помощью циркуля можно проводить окружности произвольного либо заданного радиуса, а линейка позволяет проводить произвольную прямую, либо прямую, проходящую через одну или две заданные точки. Также можно отмечать произвольную точку плоскости (прямой, отрезка, окружности) и точки пересечения прямых и окружностей.

Describe the algorithm of constructing (using a compass and a ruler) a triangle knowing its inscribed circle's radius and the ratio of its sides being equal to $4:5:7$.
With the help of a compass you can draw circles of arbitrary or given radius; the ruler allows you to draw an arbitrary straight line or a straight line passing through one or two given points. You can also mark an arbitrary point on the plane (or a straight line, or a segment, or a circle) and intersection points of straight lines and circles.

4. Опишите алгоритм построения (с помощью циркуля и линейки без делений) треугольника по его периметру и двум острым углам.
С помощью циркуля можно проводить окружности произвольного либо заданного радиуса, а линейка позволяет проводить произвольную прямую, либо прямую, проходящую через одну или две заданные точки. Также можно отмечать произвольную точку плоскости (прямой, отрезка, окружности) и точки пересечения прямых и окружностей.

Describe the algorithm of constructing (using a compass and a ruler) a triangle knowing its perimeter and its two acute angles.
With the help of a compass you can draw circles of arbitrary or given radius; the ruler allows you to draw an arbitrary straight line or a straight line passing through one or two given points. You can also mark an arbitrary point on the plane (or a straight line, or a segment, or a circle) and intersection points of straight lines and circles.

Solution (ENG). *Explaining solution of the task 2.*
First, we put a segment of a given length (we denote it by x) on an arbitrary straight line. Let's draw circles of radius x with centers at the ends of this segment – they intersect at two points, each of which, together with the ends of the original segment, forms a triple of vertices of an equilateral triangle. Dividing one of the sides of this triangle in half and connecting its center with the opposite vertex we get a triangle, the hypotenuse of which is equal to the given segment, and the ratio of legs is $\operatorname{tg} 60^\circ = \sqrt{3}$.

Comment. In solving problems 3 and 4, an algorithm for constructing a triangle similar to the original one is used. This algorithm is based on the following:
Let the points B_1, B_2 be marked on the ray AB, the points C_1, C_2 on the ray AC, and the points A, B, C do not lie on one straight line. If $B_1C_1 \parallel B_2C_2$, then $\frac{AB_1}{B_1B_2} = \frac{AC_1}{C_1C_2}$.
The truth of this statement immediately follows from the similarity between $\triangle AB_1C_1$ and $\triangle AB_2C_2$.
Thus, if we construct a triangle similar to the required one, then we will need to make a construction that implements a homothety centered at one of the vertices of this triangle with a coefficient equal to the ratio of the constructed segment (in problem 3 – the radius of the inscribed circle, in problem 4 – the perimeter) to the one given by condition.

Explaining solution of the task 3.
Let's put a segment of an arbitrary length (we denote it by x) on an arbitrary straight line. Let's put on this straight line segments of length $4x, 5x, 7x$ – sides of a triangle similar to the required one; it

exists because $4x+5x>7x$. Then we construct circles with centers at the ends A and B of a segment of length $7x$ and radii $4x$ and $5x$, respectively. We call one of the intersection points of these circles C – thus, $\triangle ABC$ is constructed similar to the required one.
Let's construct a circle inscribed in it: for that we draw the bisectors of its two corners; the point of their intersection is the center of the circle, from which we drop the perpendicular to one of the sides of the triangle; its length is the radius of the circle.
then we put on an arbitrary straight line the segment KL equal to the radius of the circle inscribed in $\triangle ABC$ and the segment LM equal to the one specified in the condition (the point L is located between points K and M). Set aside an arbitrary ray KP that does not lie on the straight line KM, and on this ray there is a segment KT equal to $AC=4x$. Draw the line LT and the line $MS \parallel LT$: the segment TS is equal to the side A_1C_1 of the required triangle. by dividing this side into 4 equal segments we get the segment $y=\frac{1}{4}TS$. Triangle with sides $4y, 5y, 7y$ is the required one.

Solution (RUS). *Разбор варианта №2.*
Сначала отложим на произвольной прямой отрезок заданной длины (обозначим ее за x). Проведем окружности радиуса x с центрами в концах этого отрезка – они пересекутся в двух точках, каждая из которых вместе с концами исходного отрезка образует тройку вершин равностороннего треугольника. Разделим пополам одну из сторон этого треугольника и соединим ее центр с противоположной вершиной – получим треугольник, гипотенуза которого равна заданному отрезку, а отношение катетов равно $\operatorname{tg} 60^\circ = \sqrt{3}$.

Комментарий. В решении задач 3 и 4 задействуется алгоритм построения треугольника, подобного исходному. Этот алгоритм базируется на следующем:
Пусть на луче AB отмечены точки B_1, B_2, на луче AC – точки C_1, C_2, причем точки A, B, C не лежат на одной прямой. Если $B_1C_1 \parallel B_2C_2$, то $\frac{AB_1}{B_1B_2} = \frac{AC_1}{C_1C_2}$.
Истинность этого утверждения немедленно следует из подобия $\triangle AB_1C_1$ и $\triangle AB_2C_2$.
Таким образом, если мы построим треугольник, подобный требуемому, то далее потребуется произвести построение, реализующее гомотетию с центром в одной из вершин этого треугольника с коэффициентом, равным отношению построенного отрезка (в задаче 3 – радиуса вписанной окружности, в задаче 4 – периметра) к заданному по условию.

Разбор варианта №3.
Отложим на произвольной прямой отрезок произвольной длины (обозначим эту длину за x). Отложим на этой прямой отрезки длины $4x, 5x, 7x$ – стороны треугольника, подобного требуемому; он существует, поскольку $4x+5x>7x$. Построим окружности с центрами в концах A и B отрезка длиной $7x$ и радиусами $4x$ и $5x$ соответственно. Одну из точек пересечения этих окружностей назовем C – таким образом, построен $\triangle ABC$, подобный требуемому.
Построим окружность, вписанную в него: для этого проведем биссектрисы двух его углов; точка их пересечения – центр окружности, из которой опустим перпендикуляр к одной из сторон треугольника; его длина – радиус окружности.
Отложим на произвольной прямой отрезок KL, равный радиусу окружности, вписанной в $\triangle ABC$, и отрезок LM, равный заданному в условии (точка L расположена между точками K и M). Отложим произвольный луч KP, не лежащий на прямой KM, и на этом луче – отрезок KT, равный $AC=4x$. Проведем прямую LT и прямую $MS \parallel LT$: отрезок TS равен стороне A_1C_1 требуемого треугольника. Разделим эту сторону на 4 равных отрезка – получим отрезок $y=\frac{1}{4}TS$. Треугольник со сторонами $4y, 5y, 7y$ – требуемый.

Task 6.

1. Решите для положительных $x_1, x_2, \ldots, x_{2021}$:

$$\begin{cases} 2x_1 + \frac{18}{x_2} = 12 - (x_1 - 2x_2 + x_{2021})^2 \\ 2x_2 + \frac{18}{x_3} = 12 - (x_2 - 2x_3 + x_1)^2 \\ 2x_3 + \frac{18}{x_4} = 12 - (x_3 - 2x_4 + x_2)^2 \\ \ldots \\ 2x_{2020} + \frac{18}{x_{2021}} = 12 - (x_{2020} - 2x_{2021} + x_{2019})^2 \\ 2x_{2021} + \frac{18}{x_1} = 12 - (x_{2021} - 2x_1 + x_{2020})^2 \end{cases}$$

   Solve for positive $x_1, x_2, \ldots, x_{2021}$:

$$\begin{cases} 2x_1 + \frac{18}{x_2} = 12 - (x_1 - 2x_2 + x_{2021})^2 \\ 2x_2 + \frac{18}{x_3} = 12 - (x_2 - 2x_3 + x_1)^2 \\ 2x_3 + \frac{18}{x_4} = 12 - (x_3 - 2x_4 + x_2)^2 \\ \ldots \\ 2x_{2020} + \frac{18}{x_{2021}} = 12 - (x_{2020} - 2x_{2021} + x_{2019})^2 \\ 2x_{2021} + \frac{18}{x_1} = 12 - (x_{2021} - 2x_1 + x_{2020})^2 \end{cases}$$

   Answer: $x_1 = x_2 = \cdots = x_{2021} = 3$

2. Решите для положительных $x_1, x_2, \ldots, x_{2021}$:

$$\begin{cases} 3x_1 + \frac{75}{x_2} = 30 - (x_1 - 2x_2 + x_{2021})^2 \\ 3x_2 + \frac{75}{x_3} = 30 - (x_2 - 2x_3 + x_1)^2 \\ 3x_3 + \frac{75}{x_4} = 30 - (x_3 - 2x_4 + x_2)^2 \\ \ldots \\ 3x_{2020} + \frac{75}{x_{2021}} = 30 - (x_{2020} - 2x_{2021} + x_{2019})^2 \\ 3x_{2021} + \frac{75}{x_1} = 30 - (x_{2021} - 2x_1 + x_{2020})^2 \end{cases}$$

   Solve for positive $x_1, x_2, \ldots, x_{2021}$:

$$\begin{cases} 3x_1 + \frac{75}{x_2} = 30 - (x_1 - 2x_2 + x_{2021})^2 \\ 3x_2 + \frac{75}{x_3} = 30 - (x_2 - 2x_3 + x_1)^2 \\ 3x_3 + \frac{75}{x_4} = 30 - (x_3 - 2x_4 + x_2)^2 \\ \ldots \\ 3x_{2020} + \frac{75}{x_{2021}} = 30 - (x_{2020} - 2x_{2021} + x_{2019})^2 \\ 3x_{2021} + \frac{75}{x_1} = 30 - (x_{2021} - 2x_1 + x_{2020})^2 \end{cases}$$

   Answer: $x_1 = x_2 = \cdots = x_{2021} = 5$

3. Решите для положительных $x_1, x_2, \ldots, x_{2021}$:

$$\begin{cases} 5x_1 + \frac{20}{x_2} = 20 - (x_1 - 2x_2 + x_{2021})^2 \\ 5x_2 + \frac{20}{x_3} = 20 - (x_2 - 2x_3 + x_1)^2 \\ 5x_3 + \frac{20}{x_4} = 20 - (x_3 - 2x_4 + x_2)^2 \\ \ldots \\ 5x_{2020} + \frac{20}{x_{2021}} = 20 - (x_{2020} - 2x_{2021} + x_{2019})^2 \\ 5x_{2021} + \frac{20}{x_1} = 20 - (x_{2021} - 2x_1 + x_{2020})^2 \end{cases}$$

Solve for positive $x_1, x_2, \ldots, x_{2021}$:

$$\begin{cases} 5x_1 + \frac{20}{x_2} = 20 - (x_1 - 2x_2 + x_{2021})^2 \\ 5x_2 + \frac{20}{x_3} = 20 - (x_2 - 2x_3 + x_1)^2 \\ 5x_3 + \frac{20}{x_4} = 20 - (x_3 - 2x_4 + x_2)^2 \\ \ldots \\ 5x_{2020} + \frac{20}{x_{2021}} = 20 - (x_{2020} - 2x_{2021} + x_{2019})^2 \\ 5x_{2021} + \frac{20}{x_1} = 20 - (x_{2021} - 2x_1 + x_{2020})^2 \end{cases}$$

Answer: $x_1 = x_2 = \cdots = x_{2021} = 2$

4. Решите для положительных $x_1, x_2, \ldots, x_{2021}$:

$$\begin{cases} 7x_1 + \frac{28}{x_2} = 28 - (x_1 - 2x_2 + x_{2021})^2 \\ 7x_2 + \frac{28}{x_3} = 28 - (x_2 - 2x_3 + x_1)^2 \\ 7x_3 + \frac{28}{x_4} = 28 - (x_3 - 2x_4 + x_2)^2 \\ \ldots \\ 7x_{2020} + \frac{28}{x_{2021}} = 28 - (x_{2020} - 2x_{2021} + x_{2019})^2 \\ 7x_{2021} + \frac{28}{x_1} = 28 - (x_{2021} - 2x_1 + x_{2020})^2 \end{cases}$$

Solve for positive $x_1, x_2, \ldots, x_{2021}$:

$$\begin{cases} 7x_1 + \frac{28}{x_2} = 28 - (x_1 - 2x_2 + x_{2021})^2 \\ 7x_2 + \frac{28}{x_3} = 28 - (x_2 - 2x_3 + x_1)^2 \\ 7x_3 + \frac{28}{x_4} = 28 - (x_3 - 2x_4 + x_2)^2 \\ \ldots \\ 7x_{2020} + \frac{28}{x_{2021}} = 28 - (x_{2020} - 2x_{2021} + x_{2019})^2 \\ 7x_{2021} + \frac{28}{x_1} = 28 - (x_{2021} - 2x_1 + x_{2020})^2 \end{cases}$$

Answer: $x_1 = x_2 = \cdots = x_{2021} = 2$

Solution (ENG). *Explaining the solution of the 1st version of the task, the others are solved similarly.*
According to the Cauchy inequality, $ax + \frac{b}{x} \geq 2\sqrt{ab}$ holds for positive a, b, and the equality holds for $x = \sqrt{\frac{b}{a}}$. Thus, $2t + \frac{18}{t} \geq 12$ and equality holds for $t = 3$.
By adding the equations of the original system we get

$$2x_1 + \frac{18}{x_1} + 2x_2 + \frac{18}{x_2} + \cdots + 2x_{2021} + \frac{18}{x_{2021}} = 12 \cdot 2021 - A$$

, while $A = (x_1 - 2x_2 + x_{2021})^2 + (x_2 - 2x_3 + x_1)^2 + \cdots + (x_{2021} - 2x_1 + x_{2020})^2$ with $A \geq 0$.
The left side of the obtained equality is not less than $12 \cdot 2021$ according to the Cauchy inequality, and the right side is not more than $12 \cdot 2021$. This means that to achieve equality we need $x_1 = x_2 = \cdots = x_{2021} = 3$, which gives $A = 0$. It is easy to verify that the specified variable values are appropriate.

If (while the rest of the reasoning is correct) it is not said that $A = 0$ with $x_1 = \cdots = x_{2021} = 3$, then 1 point is subtracted from the result.

Solution (RUS). *Разбор варианта №1, остальные решаются аналогично.*
Согласно неравенству Коши, для положительных a, b выполнено $ax + \frac{b}{x} \geq 2\sqrt{ab}$, причем равенство достигается при $x = \sqrt{\frac{b}{a}}$. Значит, $2t + \frac{18}{t} \geq 12$ и равенство достигается при $t = 3$.
Складывая уравнения исходной системы, получим

$$2x_1 + \frac{18}{x_1} + 2x_2 + \frac{18}{x_2} + \cdots + 2x_{2021} + \frac{18}{x_{2021}} = 12 \cdot 2021 - A$$

, где $A = (x_1 - 2x_2 + x_{2021})^2 + (x_2 - 2x_3 + x_1)^2 + \cdots + (x_{2021} - 2x_1 + x_{2020})^2$, т.е. $A \geq 0$.
Левая часть полученного равенства не меньше $12 \cdot 2021$ согласно неравенству Коши, а правая – не больше $12 \cdot 2021$. Значит, для достижения равенства необходимо $x_1 = x_2 = \cdots = x_{2021} = 3$, что дает $A = 0$. Легко убедиться, что указанные значения переменных подходят.

Если при верности остальных рассуждений не указано, что $A = 0$ при $x_1 = \cdots = x_{2021} = 3$, то снимается 1 балл.