Описание системы баллов за решение задач:

1. Первичная оценка решения каждой задачи выставляется по 5-балльной шкале, где

0 - задача не решена или решена неверно из-за грубых ошибок в рассуждениях;

1 - задача решена неверно, но присутствует плодотворная идея, применимая для решения задачи;

2 - задача решена неверно, но присутствует и частично применена плодотворная идея, достигнут некоторый прогресс в решении;

3 - задача решена частично либо полностью, но с существенными арифметическими ошибками при наличии правильного хода рассуждений;

4 - задача решена верно, но с незначительными ошибками;

5 - задача полностью решена.

2. Для каждой задачи вычисляется средний балл (M) по результатам ее решения всеми участниками.

3. Весовой коэффициент (K) каждой задачи вычисляется по простой формуле:

$$K = 10 - 1.8 \cdot M$$

Таким образом, весовой коэффициент задачи может изменяться в пределах от 1 до 10 в зависимости от среднего балла участников за эту задачу.

4. Балл каждого участника за каждую задачу умножается на весовой коэффициент этой задачи.

5. Баллы, набранные участником, суммируются с округлением до ближайшего целого в бóльшую сторону.

Specification of the score system:

1. Pre-score of the solution to each problem is set on a 5-point scale, where

0 - a task was not solved or solved incorrectly due to gross reasoning blunder;

1 - a task was solved incorrectly but there is a fruitful idea that can be used to solve the task;

2 - a task was solved incorrectly but a fruitful idea is present and partially applied, some progress has been made in the solution;

3 - a task was solved partially or completely but with significant arithmetic errors in the presence of the correct line of reasoning;

4 - a task was solved correctly but with minor errors;

5 - a task was solved completely.

2. An average score (M) is calculated based on the results of all participants for each task.

3. The weighting factor (K) of each task is calculated using a simple formula:

$$K = 10 - 1.8 \cdot M$$

Thus, the weighting coefficient of a task can vary from 1 to 10, depending on the average score of the participants for this task.

4. Each participant's score for each task is multiplied by the weighting factor of that task.

5. The points scored by the participant are summed and rounded up to the nearest integer.

Описание рейтинговой системы:

В основу системы рейтингов по олимпиадной математике, которая стартовала в Университете Иннополис с лета 2020 года, положена система ELO, используемая в мире шахмат, го, CodeForces и т. д.

Первоначальный рейтинг любого участника равен 1500. В рамках конкретного соревнования (олимпиада, школа олимпиадной подготовки, …) на основе рейтинга участника определяется его *ожидаемая* позиция (*EP*) в рейтинговой таблице, а по результатам соревнования – *реальная* позиция (*FP*). Чем выше реальная позиция в сравнении с ожидаемой, тем больше будет прибавка к рейтингу по итогам соревнования.

Прибавка к рейтингу вычисляется по формуле:

$$D = 2 \cdot P + 400 \cdot \frac{EP - FP}{N}$$

Здесь P – количество баллов, набранное участником, N – общее количество участников.

Во время первых двух (для участника) соревнований не предусмотрено понижение рейтинга (т. е. если $EP < FP$, то $D = 2 \cdot P$), начиная с третьего соревнования рейтинг сможет понизиться, если ожидаемая позиция будет выше реальной.

Specification of the rating system:

The rating system in Olympiad mathematics was introduced in Innopolis University in the summer of 2020. It is based on the ELO system used in chess, game of go, CodeForces, etc.

The initial rating of any participant is 1500. Expected position (*EP*) of a participant of a specific competition (Olympiad, school of Olympiad training, ...) is based on the participant's rating. The final position (*FP*) of the participant is determined right after the competition finishes.

Change in the rating is based on the difference between EP and FP and calculated by the formula:

$$D = 2 \cdot P + 400 \cdot \frac{EP - FP}{N}$$

Here P is the number of points scored by the participant, N is the total number of participants.

During the first two competitions, there is no downgrade in the rating for a participant (i.e. if $EP < FP$ then $D = 2 \cdot P$). But the rating can be downgraded if the expected position is higher than the final one, starting from the third competition for the participant.

Анонс финала IO-2020 по математике
(IOAM-2020)

Математика – не только красивая наука и увлекательная дисциплина, но и очень полезный инструмент физики, робототехники, машинного обучения, защиты информации и т. д.
На финале Innopolis Open по математике вам будут предложены задачи по математике с прикладным содержанием. Помимо собственно математики, вам понадобятся базовое знание физики и навыки программирования.
Задачи для финала олимпиады разработали профессора и сотрудники лабораторий Университета Иннополис:

- Профессор Н.В.Шилов – руководитель лаборатории программной инженерии
- Профессор А.М.Хан – руководитель лаборатории машинного обучения
- Профессор А.С.Климчик – руководитель лаборатории промышленной робототехники
- Профессор Л.А.Меркин – научный руководитель исследовательского центра в области систем распределенного реестра
- Профессор А.В.Малолетов – заместитель руководителя центра технологий компонентов робототехники и мехатроники, сотрудник лаборатории автономных транспортных систем
- П.В.Бибиков – тренер команды Москвы на Всероссийской математической олимпиаде
- А.В.Наумчев – сотрудник лаборатории программной инженерии, лаборатории разработки крипто-протокола

Innopolis Open Olympiad in Applied Mathematics
(IOAM)

Mathematics is not only beautiful science but also an incredibly useful tool for physics, robotics, machine learning, data science, information security etc. Innopolis University is launching a new open olympiad in applied mathematics inspired by these subjects. The tasks for the olympiad are made by the University professors and heads of laboratories:

- Prof. N. Shilov - head of software engineering laboratory in Innopolis University
- Prof. A.M. Khan - head of machine learning laboratory in Innopolis University
- Prof. A. Klimchik - head of technology center for robotics and mechatronics in Innopolis University
- Prof. L. Merkin - head of Innopolis University research center for distributed ledger systems
- Prof. A. Maloletov - member of autonomous transport systems laboratory in Innopolis University

- P. Bibikov – coach of Moscow team on Russian math Olympiad, holder of Agilent Teacher Award 2012
- A. Naumchev - member of software engineering laboratory in Innopolis University

1 тур
1st round
7-9 класс, задача №1 (краткий числовой ответ, 2 балла)
7-9 degree, task 1 (short answer, 2 points)

1. В полдень часовая и минутная стрелки механических часов с круглым циферблатом совпадают, то есть угол между ними равен $0°$. Через сколько минут после этого стрелки в 5-й раз образуют угол $22.5°$ (каждая стрелка движется с постоянной угловой скоростью, а углом между стрелками считается меньший из двух образуемых ими углов)?

   The hour and minute hands of a mechanical watch with a round dial coincide at noon. The angle between them is $0°$ at the time. How many minutes will pass before the hands form an angle of $22.5°$ for the 5th time (each hand moves with a constant angular speed, and the angle between the hands is the smaller of the two angles they form)?

2. В полдень часовая и минутная стрелки механических часов с круглым циферблатом совпадают, то есть угол между ними равен $0°$. Через сколько минут после этого стрелки в 3-й раз образуют угол $52.5°$ (каждая стрелка движется с постоянной угловой скоростью, а углом между стрелками считается меньший из двух образуемых ими углов)?

   The hour and minute hands of a mechanical watch with a round dial coincide at noon. The angle between them is $0°$ at the time. How many minutes will pass before the hands form an angle of $52.5°$ for the 3rd time (each hand moves with a constant angular speed, and the angle between the hands is the smaller of the two angles they form)?

3. В полдень часовая и минутная стрелки механических часов с круглым циферблатом совпадают, то есть угол между ними равен $0°$. Через сколько минут после этого стрелки во 2-й раз образуют угол $46.5°$ (каждая стрелка движется с постоянной угловой скоростью, а углом между стрелками считается меньший из двух образуемых ими углов)?

   The hour and minute hands of a mechanical watch with a round dial coincide at noon. The angle between them is $0°$ at the time. How many minutes will pass before the hands form an angle of $46.5°$ for the 2nd time (each hand moves with a constant angular speed, and the angle between the hands is the smaller of the two angles they form)?

4. В полдень часовая и минутная стрелки механических часов с круглым циферблатом совпадают, то есть угол между ними равен $0°$. Через сколько минут после этого стрелки в 4-й раз образуют угол $65.5°$ (каждая стрелка движется с постоянной угловой скоростью, а углом между стрелками считается меньший из двух образуемых ими углов)?

   The hour and minute hands of a mechanical watch with a round dial coincide at noon. The angle between them is $0°$ at the time. How many minutes will pass before the hands form an angle of $65.5°$ for the 4th time (each hand moves with a constant angular speed, and the angle between the hands is the smaller of the two angles they form)?

7-9 класс, задача №2 (краткий числовой ответ, 3 балла)
7-9 degree, task 2 (short answer, 3 points)

1. В $\triangle ABC$ провели биссектрису BL и оказалось, что $BC+CL = AB$. Зная, что $\angle ABC = 120°$, найдите $\angle BAC$ (ответ дайте в градусах).

   On the side AC of the $\triangle ABC$ there is a point L such that $BC + CL = AB$ and BL is a bisector of $\angle ABC = 120°$. Find $\angle BAC$ (give your answer in degrees).

2. В $\triangle ABC$ провели биссектрису BL и оказалось, что $BC+CL = AB$. Зная, что $\angle ABC = 135°$, найдите $\angle BAC$ (ответ дайте в градусах).

   On the side AC of the $\triangle ABC$ there is a point L such that $BC + CL = AB$ and BL is a bisector of $\angle ABC = 135°$. Find $\angle BAC$ (give your answer in degrees).

3. В $\triangle ABC$ провели биссектрису BL и оказалось, что $BC+CL = AB$. Зная, что $\angle ABC = 75°$, найдите $\angle BAC$ (ответ дайте в градусах).

   On the side AC of the $\triangle ABC$ there is a point L such that $BC + CL = AB$ and BL is a bisector of $\angle ABC = 75°$. Find $\angle BAC$ (give your answer in degrees).

4. В $\triangle ABC$ провели биссектрису BL и оказалось, что $BC+CL = AB$. Зная, что $\angle ABC = 105°$, найдите $\angle BAC$ (ответ дайте в градусах).

   On the side AC of the $\triangle ABC$ there is a point L such that $BC + CL = AB$ and BL is a bisector of $\angle ABC = 105°$. Find $\angle BAC$ (give your answer in degrees).

7-9 класс, задача №3 (краткий числовой ответ, 4 балла)
7-9 degree, task 3 (short answer, 4 points)

1. Обозначим через $R(n)$ разность шестизначного натурального n и числа, образованного первыми тремя его цифрами (например, $R(123456) = 123456 - 123 = 123333$). Сколько существует шестизначных n, для которых $R(n)$ делится на 9?

   Let $R(n)$ be the difference between six-digit positive integer n and a number made from it by deleting its last three digits (for example, $R(123456) = 123456 - 123 = 123333$). How many six-digit numbers n exist, such that their $R(n)$ is divisible by 9?

2. Обозначим через $R(n)$ разность шестизначного натурального n и числа, образованного первыми тремя его цифрами (например, $R(123456) = 123456 - 123 = 123333$). Сколько существует шестизначных n, для которых $R(n)$ делится на 33?

   Let $R(n)$ be the difference between six-digit positive integer n and a number made from it by deleting its last three digits (for example, $R(123456) = 123456 - 123 = 123333$). How many six-digit numbers n exist, such that their $R(n)$ is divisible by 33?

3. Обозначим через $R(n)$ разность шестизначного натурального n и числа, образованного первыми тремя его цифрами (например, $R(123456) = 123456 - 123 = 123333$). Сколько существует шестизначных n, для которых $R(n)$ делится на 11?

   Let $R(n)$ be the difference between six-digit positive integer n and a number made from it by deleting its last three digits (for example, $R(123456) = 123456 - 123 = 123333$). How many six-digit numbers n exist, such that their $R(n)$ is divisible by 11?

4. Обозначим через $R(n)$ разность шестизначного натурального n и числа, образованного первыми тремя его цифрами (например, $R(123456) = 123456 - 123 = 123333$). Сколько существует шестизначных n, для которых $R(n)$ делится на 3?

   Let $R(n)$ be the difference between six-digit positive integer n and a number made from it by deleting its last three digits (for example, $R(123456) = 123456 - 123 = 123333$). How many six-digit numbers n exist, such that their $R(n)$ is divisible by 3?

7-9 класс, задача №4 (краткий числовой ответ, 4 балла)
7-9 degree, task 4 (short answer, 4 points)

1. В некотором королевстве были 33 рыцаря, причем некоторые из них были вассалами других. Вассал может иметь только одного сюзерена, причем сюзерен всегда богаче своего вассала. Кроме того, в королевстве действовал закон: 'вассал моего вассала - не мой вассал', а рыцарь, имевший не менее четырех вассалов, носил титул барона. Какое наибольшее число баронов могло быть при всех этих условиях?

   Some kingdom had 33 knights, some of whom were vassals of others. A vassal can have only one suzerain, and the suzerain is always richer than his vassal. In addition, the kingdom had a law: 'the vassal of my vassal is not my vassal', and knights who had at least four vassals were titled as barons. What was the largest number of barons under all these conditions?

2. В некотором королевстве были 45 рыцарей, причем некоторые из них были вассалами других. Вассал может иметь только одного сюзерена, причем сюзерен всегда богаче своего вассала. Кроме того, в королевстве действовал закон: 'вассал моего вассала - не мой вассал', а рыцарь, имевший не менее четырех вассалов, носил титул барона. Какое наибольшее число баронов могло быть при всех этих условиях?

   Some kingdom had 45 knights, some of whom were vassals of others. A vassal can have only one suzerain, and the suzerain is always richer than his vassal. In addition, the kingdom had a law: 'the vassal of my vassal is not my vassal', and knights who had at least four vassals were titled as barons. What was the largest number of barons under all these conditions?

3. В некотором королевстве были 37 рыцарей, причем некоторые из них были вассалами других. Вассал может иметь только одного сюзерена, причем сюзерен всегда богаче своего вассала. Кроме того, в королевстве действовал закон: 'вассал моего вассала - не мой вассал', а рыцарь, имевший не менее четырех вассалов, носил титул барона. Какое наибольшее число баронов могло быть при всех этих условиях?

   Some kingdom had 37 knights, some of whom were vassals of others. A vassal can have only one suzerain, and the suzerain is always richer than his vassal. In addition, the kingdom had a law: 'the vassal of my vassal is not my vassal', and knights who had at least four vassals were titled as barons. What was the largest number of barons under all these conditions?

4. В некотором королевстве был 41 рыцарь, причем некоторые из них были вассалами других. Вассал может иметь только одного сюзерена, причем сюзерен всегда богаче своего вассала. Кроме того, в королевстве действовал закон: 'вассал моего вассала - не мой вассал', а рыцарь, имевший не менее четырех вассалов, носил титул барона. Какое наибольшее число баронов могло быть при всех этих условиях?

   Some kingdom had 41 knights, some of whom were vassals of others. A vassal can have only one suzerain, and the suzerain is always richer than his vassal. In addition, the kingdom had a law: 'the vassal of my vassal is not my vassal', and knights who had at least four vassals were titled as barons. What was the largest number of barons under all these conditions?

7-9 класс, задача №5 (краткий числовой ответ, 8 баллов)
7-9 degree, task 5 (short answer, 8 points)

1. На каждом неграничном единичном отрезке доски 28×18 поставили число, равное количеству разбиений доски на доминошки, в которых этот отрезок лежит на границе доминошки. Какова последняя цифра суммы всех написанных чисел?

   On each non-boundary unit segment of the 28×18 board, we put an integer representing the number of partitions of the board into rectangles 1×2, in which this segment lies on the boundary of the domino. What is the last digit of the sum of all these numbers?

2. На каждом неграничном единичном отрезке доски 38×8 поставили число, равное количеству разбиений доски на доминошки, в которых этот отрезок лежит на границе доминошки. Какова последняя цифра суммы всех написанных чисел?

   On each non-boundary unit segment of the 38×8 board, we put an integer representing the number of partitions of the board into rectangles 1×2, in which this segment lies on the boundary of the domino. What is the last digit of the sum of all these numbers?

3. На каждом неграничном единичном отрезке доски 18×38 поставили число, равное количеству разбиений доски на доминошки, в которых этот отрезок лежит на границе доминошки. Какова последняя цифра суммы всех написанных чисел?

   On each non-boundary unit segment of the 18×38 board, we put an integer representing the number of partitions of the board into rectangles 1×2, in which this segment lies on the boundary of the domino. What is the last digit of the sum of all these numbers?

4. На каждом неграничном единичном отрезке доски 28×8 поставили число, равное количеству разбиений доски на доминошки, в которых этот отрезок лежит на границе доминошки. Какова последняя цифра суммы всех написанных чисел?

   On each non-boundary unit segment of the 28×8 board, we put an integer representing the number of partitions of the board into rectangles 1×2, in which this segment lies on the boundary of the domino. What is the last digit of the sum of all these numbers?

7-9 класс, задача №6 (краткий числовой ответ, 10 баллов)
7-9 degree, task 6 (short answer, 10 points)

1. Последовательность слов $w_0, w_1, w_2, w_3, \ldots$ строится следующим рекуррентным образом: $w_0 = a$ и $w_n = (w_{n-1}(w_{n-1}))$ для любого натурального n. Таким образом, $w_0 = a, w_1 = (a(a)), w_2 = ((a(a))((a(a))))$ и так далее. Пусть значение функции $L(n)$ для натурального n равно количеству символов в слове w_n. Найдите $L(2021) - L(2019)$.

   Let infinite sequence of words $w_0, w_1, w_2, w_3, \ldots$ be constructed as follows: $w_0 = a$ и $w_n = (w_{n-1}(w_{n-1}))$ for any positive integer n. Thus, $w_0 = a, w_1 = (a(a)), w_2 = ((a(a))((a(a))))$ and so on. Let function $L(n)$ be equal to the number of symbols in w_n for any positive integer n. What is $L(2021) - L(2019)$?

2. Последовательность слов $w_0, w_1, w_2, w_3, \ldots$ строится следующим рекуррентным образом: $w_0 = a$ и $w_n = (w_{n-1}(w_{n-1}))$ для любого натурального n. Таким образом, $w_0 = a, w_1 = (a(a)), w_2 = ((a(a))((a(a))))$ и так далее. Пусть значение функции $L(n)$ для натурального n равно количеству символов в слове w_n. Найдите $L(2020) - L(2018)$.

   Let infinite sequence of words $w_0, w_1, w_2, w_3, \ldots$ be constructed as follows: $w_0 = a$ и $w_n = (w_{n-1}(w_{n-1}))$ for any positive integer n. Thus, $w_0 = a, w_1 = (a(a)), w_2 = ((a(a))((a(a))))$ and so on. Let function $L(n)$ be equal to the number of symbols in w_n for any positive integer n. What is $L(2020) - L(2018)$?

3. Последовательность слов $w_0, w_1, w_2, w_3, \ldots$ строится следующим рекуррентным образом: $w_0 = a$ и $w_n = (w_{n-1}(w_{n-1}))$ для любого натурального n. Таким образом, $w_0 = a, w_1 = (a(a)), w_2 = ((a(a))((a(a))))$ и так далее. Пусть значение функции $L(n)$ для натурального n равно количеству символов в слове w_n. Найдите $L(2021) - L(2018)$.

   Let infinite sequence of words $w_0, w_1, w_2, w_3, \ldots$ be constructed as follows: $w_0 = a$ и $w_n = (w_{n-1}(w_{n-1}))$ for any positive integer n. Thus, $w_0 = a, w_1 = (a(a)), w_2 = ((a(a))((a(a))))$ and so on. Let function $L(n)$ be equal to the number of symbols in w_n for any positive integer n. What is $L(2021) - L(2018)$?

4. Последовательность слов $w_0, w_1, w_2, w_3, ...$ строится следующим рекуррентным образом: $w_0 = a$ и $w_n = (w_{n-1}(w_{n-1}))$ для любого натурального n. Таким образом, $w_0 = a, w_1 = (a(a)), w_2 = ((a(a))((a(a))))$ и так далее. Пусть значение функции $L(n)$ для натурального n равно количеству символов в слове w_n. Найдите $L(2020) - L(2019)$.

   Let infinite sequence of words $w_0, w_1, w_2, w_3, ...$ be constructed as follows: $w_0 = a$ и $w_n = (w_{n-1}(w_{n-1}))$ for any positive integer n. Thus, $w_0 = a, w_1 = (a(a)), w_2 = ((a(a))((a(a))))$ and so on. Let function $L(n)$ be equal to the number of symbols in w_n for any positive integer n. What is $L(2020) - L(2019)$?

7-9 класс. Разбор задач
7-9 degree. Solution of tasks

Task 1. В полдень часовая и минутная стрелки механических часов с круглым циферблатом совпадают, то есть угол между ними равен $0°$. Через сколько минут после этого стрелки в 5-й раз образуют угол $22.5°$ (каждая стрелка движется с постоянной угловой скоростью, а углом между стрелками считается меньший из двух образуемых ими углов)?

The hour and minute hands of a mechanical watch with a round dial coincide at noon. The angle between them is $0°$ at the time. How many minutes will pass before the hands form an angle of $22.5°$ for the 5th time (each hand moves with a constant angular speed, and the angle between the hands is the smaller of the two angles they form)?

Solution (RUS). Угловая скорость минутной стрелки – $6°$/мин, часовой – $0.5°$/мин. Значит, по прошествии t минут минутная стрелка опередит часовую на $5.5 \cdot t$ градусов. Когда стрелки в 5-й раз образуют угол $22.5°$, минутная стрелка будет опережать часовую на $2 \cdot 360 + 22.5 = 742.5 = 5.5 \cdot t$ градусов, откуда $t = 135$ минут.

Answer: 135

Solution (ENG). The angular speed of the minute hand is $6°$/min, the hour hand's speed is $0.5°$/min. This means that after t minutes have elapsed, the minute hand will advance the hour hand by $5.5 \cdot t$ degrees. When the hands make an angle of $22.5°$ for the 5th time, the minute hand will advance the hour hand by $2 \cdot 360 + 22.5 = 742.5 = 5.5 \cdot t$ degrees, so $t = 135$ minutes.

Answer: 135 minutes

Task 2. В $\triangle ABC$ провели биссектрису BL и оказалось, что $BC + CL = AB$. Зная, что $\angle ABC = 120°$, найдите $\angle BAC$ (ответ дайте в градусах).

On the side AC of the $\triangle ABC$ there is a point L such that $BC + CL = AB$ and BL is a bisector of $\angle ABC = 120°$. Find $\angle BAC$ (give your answer in degrees).

Solution (RUS). Отметим на отрезке AB точку K так, чтобы $BK = BC$. Тогда $AK = LC = KL$. Значит, $\angle BCA = \angle BKL = 2 \cdot \angle BAC$. Осталось найти искомый угол: $\angle BAC = (180° - 120°)/3 = 20°$.

Answer: $20°$

Solution (ENG). We mark the point K on the segment AB so that $BK = BC$. Then $AK = LC = KL$. So, $\angle BCA = \angle BKL = 2 \cdot \angle BAC$. Then we find the needed angle: $\angle BAC = (180° - 120°)/3 = 20°$.

Answer: $20°$

Task 3. Обозначим через $R(n)$ разность шестизначного натурального n и числа, образованного первыми тремя его цифрами (например, $R(123456) = 123456 - 123 = 123333$). Сколько существует шестизначных n, для которых $R(n)$ делится на 9?

Let $R(n)$ be the difference between six-digit positive integer n and a number made from it by deleting its last three digits (for example, $R(123456) = 123456 - 123 = 123333$). How many six-digit numbers n exist, such that their $R(n)$ is divisible by 9?

Solution (RUS). Заметим, что если $R(n) = \overline{xy}$, где x и y — трехзначные числа, то $R(n) = 100x + y - x = 99x + y$. Значит, y должно делиться на 9. Чисел x ровно 900 (на первом месте – 9 цифр, на втором и третьем – по 10), а трехзначных чисел, кратных 9, ровно $[999/9] + 1 = 112$. Итого $900 \cdot 112$.

Answer: 110800

Solution (ENG). Note that if $R(n) = \overline{xy}$, where x and y are three-digit numbers, then $R(n) = 100x + y - x = 99x + y$. Hence, y must be divisible by 9. There are exactly 900 numbers x (in the first place – 9 digits, in the second and third – 10 each), and three-digit numbers divisible by 9, exactly $[999/9] + 1 = 112$. Total $900 \cdot 112$.

Answer: 110800

Task 4. В некотором королевстве были 33 рыцаря, причем некоторые из них были вассалами других. Вассал может иметь только одного сюзерена, причем сюзерен всегда богаче своего вассала. Кроме того, в королевстве действовал закон: 'вассал моего вассала - не мой вассал', а рыцарь, имевший не менее четырех вассалов, носил титул барона. Какое наибольшее число баронов могло быть при всех этих условиях?

Some kingdom had 33 knights, some of whom were vassals of others. A vassal can have only one suzerain, and the suzerain is always richer than his vassal. In addition, the kingdom had a law: 'the vassal of my vassal is not my vassal', and knights who had at least four vassals were titled as barons. What was the largest number of barons under all these conditions?

Solution (RUS). Изобразим задачу в виду ориентированного графа, направив ребро от сюзерена к его вассалу. Тогда у нас получится набор деревьев. В этих деревьях суммарно 33 вершины, значит, в них не более 32 ребер. Поэтому исходящих стрелок будет не более $[32/4] = 8$. Значит, баронов не больше 8. Пример с 8 баронами строится подвешиванием графа за вершину: на первом уровне 1 вершина, на втором — 4 вершины, на третьем — 16 вершин, на четвертом — 12 вершин.

Answer: 8

Solution (ENG). Lets represent the problem in the form of a directed graph, directing an edge from the suzerain to his vassal. Then we have a set of trees. These trees have a total of 33 vertices, which means they have no more than 32 edges. Therefore, there will be no more than $[32/4] = 8$ outgoing arrows. This means that there are no more than 8 barons. An example with 8 barons is constructed by hanging the graph by a vertex: on the first level there is 1 vertex, on the second level - 4 vertices, on the third level - 16 vertices, on the fourth level - 12 vertices.

Answer: 8

Task 5. На каждом неграничном единичном отрезке доски 8×8 поставили число, равное количеству разбиений доски на доминошки, в которых этот отрезок лежит на границе доминошки. Какова последняя цифра суммы всех написанных чисел?

On each non-boundary unit segment of the 8×8 board, we put an integer representing the number of partitions of the board into rectangles 1×2, in which this segment lies on the boundary of the domino. What is the last digit of the sum of all these numbers?

Solution (RUS). Пусть k – общее число способов разбить нашу доску на доминошки, а k_i – количество искомых способов для i-го отрезка. Подсчитаем количество плохих покрытий. Оно равно

$$\sum (k - k_i) = 112k - \sum k_i = 32k,$$

т.к. общее количество отрезков равно 112, а каждое плохое покрытие считается 32 раза (это общее количество доминошек, и каждая из них может побывать плохой). Значит, искомая сумма хороших покрытий равна $\sum k_i = 80k$, и последняя цифра равна 0.

Answer: 0

Solution (ENG). Let k be the total number of ways to split our board into 1×2 rectangles, and k_i is the number of required ways for the i-th segment. Let's count the number of bad splits. It equals

$$\sum(k-k_i)=112k-\sum k_i=32k,$$

since the total number of segments is 112, and each bad coverage is counted 32 times (this is the total number of rectangles, and each of them can be bad). This means that the required sum of good covers is $\sum k_i=80k$, and the last digit is 0.

Answer: 0

Task 6. Последовательность слов $w_0, w_1, w_2, w_3, \ldots$ строится следующим рекуррентным образом: $w_0=a$ и $w_n=(w_{n-1}(w_{n-1}))$ для любого натурального n. Таким образом, $w_0=a, w_1=(a(a)), w_2=((a(a))((a(a))))$ и так далее. Пусть значение функции $L(n)$ для натурального n равно количеству символов в слове w_n. Найдите $L(2021)-L(2019)$.

Let infinite sequence of words $w_0, w_1, w_2, w_3, \ldots$ be constructed as follows: $w_0=a$ и $w_n=(w_{n-1}(w_{n-1}))$ for any positive integer n. Thus, $w_0=a, w_1=(a(a)), w_2=((a(a))((a(a))))$ and so on. Let function $L(n)$ be equal to the number of symbols in w_n for any positive integer n. What is $L(2021)-L(2019)$?

Solution (RUS). Для любого натурального n $L(n+1)=4+2\cdot L(n)$, следовательно, $L(n)=5\cdot 2^n-4$ (доказывается по индукции).

Answer: $15\cdot 2^{2019}$

Solution (ENG). For any natural number n $L(n+1)=4+2\cdot L(n)$, therefore, $L(n)=5\cdot 2^n-4$ (can be proved by induction).

Answer: $15\cdot 2^{2019}$

10 класс, задача №1 (краткий числовой ответ, 3 балла)
10th degree, task 1 (short answer, 3 points)

1. Последовательность слов $w_0, w_1, w_2, \ldots$ строится следующим рекуррентным образом: $w_0=a$, $w_1=b$ и $w_{n+1}=w_nw_{n-1}$ (то есть последовательное соединение слов w_n и w_{n-1}) для любого натурального n. Таким образом, эта последовательность слов начинается с $w_0=a, w_1=b, w_2=ab, w_3=bab, w_4=abbab$. Сколько раз слово ab встречается в записи слова w_{24}?

   Infinite sequence of words $w_0, w_1, w_2, \ldots$ is constructed as follows: $w_0=a$, $w_1=b$ and $w_{n+1}=w_nw_{n-1}$ (concatenation of w_n and w_{n-1}) for any positive integer n. Thus the sequence starts with $w_0=a, w_1=b, w_2=ab, w_3=bab, w_4=abbab$. How many times does the word ab appear in w_{24}?

2. Последовательность слов $w_0, w_1, w_2, \ldots$ строится следующим рекуррентным образом: $w_0=a$, $w_1=b$ и $w_{n+1}=w_nw_{n-1}$ (то есть последовательное соединение слов w_n и w_{n-1}) для любого натурального n. Таким образом, эта последовательность слов начинается с $w_0=a, w_1=b, w_2=ab, w_3=bab, w_4=abbab$. Сколько раз слово ab встречается в записи слова w_{25}?

   Infinite sequence of words $w_0, w_1, w_2, \ldots$ is constructed as follows: $w_0=a$, $w_1=b$ and $w_{n+1}=w_nw_{n-1}$ (concatenation of w_n and w_{n-1}) for any positive integer n. Thus the sequence starts with $w_0=a, w_1=b, w_2=ab, w_3=bab, w_4=abbab$. How many times does the word ab appear in w_{25}?

3. Последовательность слов $w_0, w_1, w_2, \ldots$ строится следующим рекуррентным образом: $w_0=a$, $w_1=b$ и $w_{n+1}=w_nw_{n-1}$ (то есть последовательное соединение слов w_n и w_{n-1}) для любого натурального n. Таким образом, эта последовательность слов начинается с $w_0=a, w_1=b, w_2=ab, w_3=bab, w_4=abbab$. Сколько раз слово ab встречается в записи слова w_{23}?

   Infinite sequence of words $w_0, w_1, w_2, \ldots$ is constructed as follows: $w_0=a$, $w_1=b$ and $w_{n+1}=w_nw_{n-1}$ (concatenation of w_n and w_{n-1}) for any positive integer n. Thus the sequence starts with $w_0=a, w_1=b, w_2=ab, w_3=bab, w_4=abbab$. How many times does the word ab appear in w_{23}?

4. Последовательность слов $w_0, w_1, w_2, \ldots$ строится следующим рекуррентным образом: $w_0 = a$, $w_1 = b$ и $w_{n+1} = w_n w_{n-1}$ (то есть последовательное соединение слов w_n и w_{n-1}) для любого натурального n. Таким образом, эта последовательность слов начинается с $w_0 = a, w_1 = b, w_2 = ab, w_3 = bab, w_4 = abbab$. Сколько раз слово ab встречается в записи слова w_{26}?

   Infinite sequence of words $w_0, w_1, w_2, \ldots$ is constructed as follows: $w_0 = a$, $w_1 = b$ and $w_{n+1} = w_n w_{n-1}$ (concatenation of w_n and w_{n-1}) for any positive integer n. Thus the sequence starts with $w_0 = a, w_1 = b, w_2 = ab, w_3 = bab, w_4 = abbab$. How many times does the word ab appear in w_{26}?

10 класс, задача №2 (краткий числовой ответ, 4 балла)
10th degree, task 2 (short answer, 4 points)

1. В треугольнике со сторонами 7, 8 и 10 на наибольшую сторону из противолежащей вершины опущены высота и биссектриса. Найдите отношение площади треугольника, ограниченного этими высотой, биссектрисой и основанием к площади всего треугольника. Ответ запишите в виде десятичной дроби, при необходимости округлив ее до сотых.

   In a triangle with sides 7, 8 and 10 a perpendicular and a bisector are drawn to fall to the largest side from the opposite vertex. Find the ratio of the area of the triangle bounded by this perpendicular, bisector and base to the area of the entire triangle. Write your answer as a decimal fraction, rounded to the nearest hundredths if necessary.

2. В треугольнике со сторонами 8, 9 и 10 на наименьшую сторону из противолежащей вершины опущены высота и биссектриса. Найдите отношение площади треугольника, ограниченного этими высотой, биссектрисой и основанием к площади всего треугольника. Ответ запишите в виде десятичной дроби, при необходимости округлив ее до сотых.

   In a triangle with sides 8, 9 and 10 a perpendicular and a bisector are drawn to fall to the smallest side from the opposite vertex. Find the ratio of the area of the triangle bounded by this perpendicular, bisector and base to the area of the entire triangle. Write your answer as a decimal fraction, rounded to the nearest hundredths if necessary.

3. В треугольнике со сторонами 5, 7 и 8 на наименьшую сторону из противолежащей вершины опущены высота и биссектриса. Найдите отношение площади треугольника, ограниченного этими высотой, биссектрисой и основанием к площади всего треугольника. Ответ запишите в виде десятичной дроби, при необходимости округлив ее до сотых.

   In a triangle with sides 5, 7 and 8 a perpendicular and a bisector are drawn to fall to the smallest side from the opposite vertex. Find the ratio of the area of the triangle bounded by this perpendicular, bisector and base to the area of the entire triangle. Write your answer as a decimal fraction, rounded to the nearest hundredths if necessary.

4. В треугольнике со сторонами 5, 7 и 8 на наибольшую сторону из противолежащей вершины опущены высота и биссектриса. Найдите отношение площади треугольника, ограниченного этими высотой, биссектрисой и основанием к площади всего треугольника. Ответ запишите в виде десятичной дроби, при необходимости округлив ее до сотых. In a triangle with sides 5, 7 and 8 a perpendicular and a bisector are drawn to fall to the largest side from the opposite vertex. Find the ratio of the area of the triangle bounded by this perpendicular, bisector and base to the area of the entire triangle. Write your answer as a decimal fraction, rounded to the nearest hundredths if necessary.

10 класс, задача №3 (краткий числовой ответ, 4 балла)
10th degree, task 3 (short answer, 4 points)

1. Найдите наименьшее положительное a, для которого $\sqrt[3]{2+\sqrt{a}}+\sqrt[3]{2-\sqrt{a}}$ является целым. Ответ запишите в виде десятичной дроби, при необходимости округлив ее до сотых.

   Find smallest positive a such that $\sqrt[3]{2+\sqrt{a}}+\sqrt[3]{2-\sqrt{a}}$ is an integer. Write your answer as a decimal fraction, rounded to the nearest hundredths if necessary.

2. Найдите наименьшее положительное a, для которого $\sqrt[3]{3+\sqrt{a}}+\sqrt[3]{3-\sqrt{a}}$ является целым. Ответ запишите в виде десятичной дроби, при необходимости округлив ее до сотых.

   Find smallest positive a such that $\sqrt[3]{3+\sqrt{a}}+\sqrt[3]{3-\sqrt{a}}$ is an integer. Write your answer as a decimal fraction, rounded to the nearest hundredths if necessary.

3. Найдите наименьшее положительное a, для которого $\sqrt[3]{5+\sqrt{a}}+\sqrt[3]{5-\sqrt{a}}$ является целым. Ответ запишите в виде десятичной дроби, при необходимости округлив ее до сотых.

   Find smallest positive a such that $\sqrt[3]{5+\sqrt{a}}+\sqrt[3]{5-\sqrt{a}}$ is an integer. Write your answer as a decimal fraction, rounded to the nearest hundredths if necessary.

4. Найдите наименьшее положительное a, для которого $\sqrt[3]{4+\sqrt{a}}+\sqrt[3]{4-\sqrt{a}}$ является целым. Ответ запишите в виде десятичной дроби, при необходимости округлив ее до сотых.

   Find smallest positive a such that $\sqrt[3]{4+\sqrt{a}}+\sqrt[3]{4-\sqrt{a}}$ is an integer. Write your answer as a decimal fraction, rounded to the nearest hundredths if necessary.

10 класс, задача №4 (краткий числовой ответ, 5 баллов)
10th degree, task 4 (short answer, 5 points)

1. В волейбольном турнире участвовали 19 команд. Назовем тройку команд (A, B, C) непонятной, если команда A выиграла у команды B, команда B - у команды C, а команда C - у команды A. Найдите наибольшее количество непонятных троек.

   19 teams participated in the volleyball tournament. Let's call the three teams triplet (A, B, C) unclear if team A won over team B, team B over team C, and team C over team A. Find the largest number of unclear triplets.

2. В волейбольном турнире участвовали 17 команд. Назовем тройку команд (A, B, C) непонятной, если команда A выиграла у команды B, команда B - у команды C, а команда C - у команды A. Найдите наибольшее количество непонятных троек.

   17 teams participated in the volleyball tournament. Let's call the three teams triplet (A, B, C) unclear if team A won over team B, team B over team C, and team C over team A. Find the largest number of unclear triplets.

3. В волейбольном турнире участвовали 23 команды. Назовем тройку команд (A, B, C) непонятной, если команда A выиграла у команды B, команда B - у команды C, а команда C - у команды A. Найдите наибольшее количество непонятных троек.

   23 teams participated in the volleyball tournament. Let's call the three teams triplet (A, B, C) unclear if team A won over team B, team B over team C, and team C over team A. Find the largest number of unclear triplets.

4. В волейбольном турнире участвовала 21 команда. Назовем тройку команд (A, B, C) непонятной, если команда A выиграла у команды B, команда B - у команды C, а команда C - у команды A. Найдите наибольшее количество непонятных троек.

   21 teams participated in the volleyball tournament. Let's call the three teams triplet (A, B, C) unclear if team A won over team B, team B over team C, and team C over team A. Find the largest number of unclear triplets.

10 класс, задача №5 (развернутый ответ, 6 баллов)
10th degree, task 5 (detailed solution, 6 points)

1. На плоскости заданы сторона и один из прилегающих к ней углов треугольника. Известно, что величины двух других углов относятся как $5 : 11$. Опишите алгоритм построения этого треугольника с помощью циркуля и линейки.

   A side and one of the adjacent corners of the triangle are given on the plane. It is known that the values of the other two angles are related as $5 : 11$. Describe the algorithm for constructing this triangle using a ruler and a compass.

2. На плоскости заданы сторона и один из прилегающих к ней углов треугольника. Известно, что величины двух других углов относятся как $1 : 15$. Опишите алгоритм построения этого треугольника с помощью циркуля и линейки.

   A side and one of the adjacent corners of the triangle are given on the plane. It is known that the values of the other two angles are related as $1 : 15$. Describe the algorithm for constructing this triangle using a ruler and a compass.

3. На плоскости заданы сторона и один из прилегающих к ней углов треугольника. Известно, что величины двух других углов относятся как $3 : 13$. Опишите алгоритм построения этого треугольника с помощью циркуля и линейки.

   A side and one of the adjacent corners of the triangle are given on the plane. It is known that the values of the other two angles are related as $3 : 13$. Describe the algorithm for constructing this triangle using a ruler and a compass.

4. На плоскости заданы сторона и один из прилегающих к ней углов треугольника. Известно, что величины двух других углов относятся как $7 : 9$. Опишите алгоритм построения этого треугольника с помощью циркуля и линейки.

   A side and one of the adjacent corners of the triangle are given on the plane. It is known that the values of the other two angles are related as $7 : 9$. Describe the algorithm for constructing this triangle using a ruler and a compass.

10 класс, задача №6 (развернутый ответ, 10 баллов)
10th degree, task 6 (detailed solution, 10 points)

1. Решите уравнение $x\sqrt{2} + y\sqrt{3} + z\sqrt{5} = 0$ в рациональных числах.

   Find all rational solutions of the equation: $x\sqrt{2} + y\sqrt{3} + z\sqrt{5} = 0$

2. Решите уравнение $x\sqrt{3} + y\sqrt{5} + z\sqrt{7} = 0$ в рациональных числах.

   Find all rational solutions of the equation: $x\sqrt{3} + y\sqrt{5} + z\sqrt{7} = 0$

3. Решите уравнение $x\sqrt{3} + y\sqrt{7} + z\sqrt{11} = 0$ в рациональных числах.

   Find all rational solutions of the equation: $x\sqrt{3} + y\sqrt{7} + z\sqrt{11} = 0$

4. Решите уравнение $x\sqrt{2} + y\sqrt{5} + z\sqrt{7} = 0$ в рациональных числах.

   Find all rational solutions of the equation: $x\sqrt{2} + y\sqrt{5} + z\sqrt{7} = 0$

10 класс. Разбор задач
10th degree. Solution of tasks

Task 1. Последовательность слов $w_0, w_1, w_2, \ldots$ строится следующим рекуррентным образом: $w_0 = a$, $w_1 = b$ и $w_{n+1} = w_{n-1}w_n$ (то есть последовательное соединение слов w_n и w_{n-1}) для любого натурального n. Таким образом, эта последовательность слов начинается с $w_0 = a, w_1 = b, w_2 = ab, w_3 = bab, w_4 = abbab$. Сколько раз слово ab встречается в записи слова w_{24}?

Infinite sequence of words $w_0, w_1, w_2, \ldots$ is constructed as follows: $w_0 = a$, $w_1 = b$ and $w_{n+1} = w_{n-1}w_n$ (concatenation of w_n and w_{n-1}) for any positive integer n. Thus the sequence starts with $w_0 = a, w_1 = b, w_2 = ab, w_3 = bab, w_4 = abbab$. How many times does the word ab appear in w_{24}?

Solution (RUS). Обозначим за $p(n)$ число вхождений слова ab в слово w_n, тогда $p(0) = p(1) = 0, p(2) = 1, \ldots$ Начиная с $n = 1$ любое слово w_n оканчивается на символ b, значит, $p(n+1) = p(n) + p(n-1)$ для любого натурального n. Таким образом, $p(n+1) = f_n$ ($n-$е число Фибоначчи), и требуемое в условии количество равно 23-му числу Фибоначчи.

Answer: 28567

Solution (ENG). Let $p(n)$ be the number of word(s) ab in the word w_n, then $p(0) = p(1) = 0, p(2) = 1, \ldots$. For $n \geq 1$ any word w_n ends with the symbol b, so $p(n+1) = p(n) + p(n-1)$ for any positive integer n. Thus, $p(n+1) = f_n$ ($n-$th Fibonacci number), and the required number equals to the 23rd Fibonacci number.

Answer: 28567

Task 2. В треугольнике со сторонами 7, 8 и 10 на наибольшую сторону из противолежащей вершины опущены высота и биссектриса. Найдите отношение площади треугольника, ограниченного этими высотой, биссектрисой и основанием к площади всего треугольника. Ответ запишите в виде десятичной дроби, при необходимости округлив ее до сотых.

In a triangle with sides 7, 8 and 10 a perpendicular and a bisector are drawn to fall to the largest side from the opposite vertex. Find the ratio of the area of the triangle bounded by this perpendicular, bisector and base to the area of the entire triangle. Write your answer as a decimal fraction, rounded to the nearest hundredths if necessary.

Solution (RUS). Пусть в $\triangle ABC$ $AB = 10, BC = 7, AC = 8$, CD – высота, CE – биссектриса. Требуется найти $\frac{S_{\triangle CDE}}{S_{\triangle ABC}} = \frac{\frac{1}{2}CD\cdot DE}{\frac{1}{2}CD\cdot AB} = \frac{DE}{AB}$. согласно свойству биссектрисы, $\frac{BE}{AE} = \frac{BC}{AC} = \frac{7}{8}, BE + AE = AB = 10$, откуда $BE = \frac{14}{3}$. После применения теоремы Пифагора к $\triangle BCD$ и $\triangle ACD$ имеем $(AB - BD)^2 - BD^2 = AC^2 - BC^2$, откуда $BD = \frac{AB^2 + BC^2 - AC^2}{2\cdot AB} = \frac{17}{4}$. Из этого находим $DE = \frac{5}{12}$ и искомое отношение $\frac{5}{120} = \frac{1}{24} \approx 0.04$.

Answer: 0.04

Solution (ENG). Let $AB = 10, BC = 7, AC = 8$ in $\triangle ABC$, CD is the height, CE is the bisector.Then $\frac{S_{\triangle CDE}}{S_{\triangle ABC}} = \frac{\frac{1}{2}CD\cdot DE}{\frac{1}{2}CD\cdot AB} = \frac{DE}{AB}$. According to the bisector property, $\frac{BE}{AE} = \frac{BC}{AC} = \frac{7}{8}, BE + AE = AB = 10$, so $BE = \frac{14}{3}$. After using the Pythagorean theorem to $\triangle BCD$ and $\triangle ACD$ we have $(AB - BD)^2 - BD^2 = AC^2 - BC^2$, whence $BD = \frac{AB^2 + BC^2 - AC^2}{2\cdot AB} = \frac{17}{4}$. Then we find $DE = \frac{5}{12}$ and the required relation is $\frac{5}{120} = \frac{1}{24} \approx 0.04$.

Answer: 0.04

Task 3. Найдите наименьшее положительное a, для которого $\sqrt[3]{2 + \sqrt{a}} + \sqrt[3]{2 - \sqrt{a}}$ является целым. Ответ запишите в виде десятичной дроби, при необходимости округлив ее до сотых.

Find smallest positive a such that $\sqrt[3]{2 + \sqrt{a}} + \sqrt[3]{2 - \sqrt{a}}$ is an integer. Write your answer as a decimal fraction, rounded to the nearest hundredths if necessary.

Solution (RUS). Пусть $n = \sqrt[3]{2 + \sqrt{a}} + \sqrt[3]{2 - \sqrt{a}}$. Тогда

$$n^3 = 4 + 3n\sqrt[3]{4 - a} \quad \Rightarrow \quad \sqrt[3]{4 - a} = \frac{n^3 - 4}{3n}.$$

Значит, $a = 4 - \left(\frac{n^3 - 4}{3n}\right)^3$. При $n \geqslant 3$ имеем $n(n^2 - 6) \geqslant 3 \cdot 3 > 4$, откуда $a \leqslant 4 - 2^3 < 0$, что невозможно. Значит, $n = 1$ или 2. В первом случае $a = 5$, а во втором — $a = \frac{100}{27} \approx 3.70$.

Answer: 3.70

Let $n = \sqrt[3]{2+\sqrt{a}} + \sqrt[3]{2-\sqrt{a}}$. Then

$$n^3 = 4 + 3n\sqrt[3]{4-a} \quad \Rightarrow \quad \sqrt[3]{4-a} = \frac{n^3-4}{3n}.$$

So, $a = 4 - \left(\frac{n^3-4}{3n}\right)^3$. From $n \geqslant 3$ we have $n(n^2-6) \geqslant 3 \cdot 3 > 4$, so $a \leqslant 4 - 2^3 < 0$, which is wrong. By that, $n = 1$ or 2. From $n = 1$ we get $a = 5$, and from $n = 2$ we get $a = \frac{100}{27} \approx 3.70$.

Answer: 3.70

Task 4. В волейбольном турнире участвовали 19 команд. Назовем тройку команд (A, B, C) непонятной, если команда A выиграла у команды B, команда B - у команды C, а команда C - у команды A. Найдите наибольшее количество непонятных троек.

19 teams participated in the volleyball tournament. Let's call the three teams triplet (A, B, C) unclear if team A won over team B, team B over team C, and team C over team A. Find the largest number of unclear triplets.

Solution (RUS). Всего троек C_{19}^3. Будем считать минимум понятных троек. Для этого посмотрим на команду k. Если она победила a_k команд, то она участвовала в $C_{a_k}^2$ понятных тройках. Значит, общее количество понятных троек равно $C_{a_1}^2 + \ldots + C_{a_{19}}^2$, при этом $a_1 + \ldots + a_{19} = C_{19}^2$. Теперь осталось оценить сумму квадратов в цешках по неравенству о средних. В итоге минимум достигается, когда $a_1 = \ldots = a_{19} = C_{19}^2/19 = 9$. Значит, ответ — это число $C_{19}^3 - 19 \cdot C_9^2$.

Answer: 285

Solution (ENG). There are C_{19}^3 triplets in total. Let's consider a minimum of clear triplets. To do this, take a look at the k team: if it has defeated a_k teams, then it participated in $C_{a_k}^2$ clear triplets. This means that the total number of clear triplets is $C_{a_1}^2 + \ldots + C_{a_{19}}^2$, while $a_1 + \ldots + a_{19} = C_{19}^2$. Now it remains to estimate the sum of squares in combinations using the inequality about the means. As a result, the minimum is reached when $a_1 = \ldots = a_{19} = C_{19}^2/19 = 9$. So the answer is the number $C_{19}^3 - 19 \cdot C_9^2$.

Answer: 285

Task 5. На плоскости заданы сторона и один из прилегающих к ней углов треугольника. Известно, что величины двух других углов относятся как $5 : 11$. Опишите алгоритм построения этого треугольника с помощью циркуля и линейки.

A side and one of the adjacent corners of the triangle are given on the plane. It is known that the values of the other two angles are related as $5 : 11$. Describe the algorithm for constructing this triangle using a ruler and a compass.

Solution (RUS). Алгоритм построения середины отрезка: с помощью циркуля построим две окружности с центрами в концах отрезка и радиусом, равным длине отрезка. Точки пересечения этих окружностей соединим отрезком, точка пересечения которого с исходным отрезком является искомой.

Опишем алгоритм построения биссектрисы произвольного угла: с помощью циркуля построим точки пересечения со сторонами этого угла произвольной окружности с центром в вершине угла. Соединим две полученные точки отрезком, построим его середину согласно алгоритму, описанному ранее. Луч с началом в вершине исходного угла и проходящий через построенную точку является искомой биссектрисой.

Алгоритм построения угла, равного заданному: проведем окружность произвольного радиуса (обозначим его за x) – она пересечет стороны угла в двух точках. На луче, от которого надо отложить равный угол, отметим точку и проведем окружность того же радиуса, что и ранее. Построим новую окружность радиуса x с центром в точке пересечения прежней окружности с лучом. Проведем луч от отмеченной ранее точки и проходящий через точку пересечения двух построенных окружностей.

Теперь перейдем к решению задачи. Построим угол, смежный заданному, продлив одну из его сторон за вершину. Полученный угол разделим на $5+11=16=2^4$ равных частей (сначала строим биссектрису, потом биссектрисы полученных углов, потом биссектрисы четвертей исходного угла и, наконец, биссектрисы углов, полученных на предыдущем шаге). Отложим от вершины этого угла отрезок, равный заданной стороне треугольника – получим вершину его второго угла. в этой вершине построим угол, равный 5α, где α – один из 16 равных углов, построенных ранее. Точка пересечения сторон полученного и заданного углов – третья вершина требуемого треугольника.

Solution (ENG). Algorithm for constructing the middle of a segment: using a compass, draw two circles with centers at the ends of the segment and a radius equal to the length of the segment. The points of intersection of these circles are connected by a segment, the point of intersection of which with the original segment is the desired one.

Algorithm for constructing the bisector of an arbitrary angle: using a compass, we construct the intersection points with the sides of this angle of an arbitrary circle centered at the apex of the angle. Let's connect the two obtained points with a segment, construct its middle according to the algorithm described earlier. The ray with the beginning at the vertex of the initial angle and passing through the constructed point is the required bisector.

Algorithm for constructing an angle equal to a given one: draw a circle of arbitrary radius (denote it by x) - it will intersect the sides of the corner at two points. On the ray, from which an equal angle should be set aside, mark a point and draw a circle of the same radius as before. Construct a new circle of radius x centered at the intersection of the previous circle with the ray. Finally we draw a ray from the point marked earlier and passing through the point of intersection of the two constructed circles.

Now let's solve the problem. Construct an angle adjacent to the given one by extending one of its sides beyond the vertex. Divide the resulting angle into $5+11=16=2^4$ equal parts (first we build the bisector, then the bisector of the angles obtained, then the bisector of the quarters of the original angle and, finally, the bisector of the angles obtained in the previous step). Let us set aside from the vertex of this angle a segment equal to the given side of the triangle – we get the vertex of its second corner. at this vertex we construct an angle equal to 5α, where α is one of the 16 equal angles built earlier. The point of intersection of the sides of the obtained and specified angles is the third vertex of the required triangle.

Task 6. Решите уравнение $x\sqrt{2}+y\sqrt{3}+z\sqrt{5}=0$ в рациональных числах.

Find all rational solutions of the equation: $x\sqrt{2}+y\sqrt{3}+z\sqrt{5}=0$

Solution (RUS). Очевидно, уравнение имеет тривиальное решение $(0,0,0)$. Докажем, что других решений в рациональных числах нет.

Пусть найдется нетривиальная тройка (x,y,z) рациональных чисел, удовлетворяющая уравнению. Без ограничения общности можно считать ее целой, т.к. всегда можно домножить обе части равенства на НОК(x,y,z) и получить целое решение.

Тогда $x\sqrt{2}+y\sqrt{3}=-z\sqrt{5}$. Возведя обе части этого равенства в квадрат, получим

$$a+b\sqrt{6}=c,$$

где $a=2x^2+3y^2, b=2xy, c=5z^2$. Поскольку x,y,z – целые, имеем $b=c-a=0$ ввиду иррациональности $\sqrt{6}$. Из $b=0$ следует, что либо $x=0$, либо $y=0$ – эти случаи разбираются аналогично друг другу, поэтому для краткости положим $x=0$. Уравнение $c-a=0$ примет вид $5z^2=3y^2$ при ненулевых (по нашему предположению) y и z. Значит, $(\frac{y}{z})^2=\frac{5}{3}$, что невозможно ввиду иррациональности $\sqrt{\frac{5}{3}}$.

Таким образом, наше предположение было неверно, и исходное уравнение не имеет нетривиальных решений.

Answer: $(0,0,0)$

Solution (ENG). Obviously, the equation has a trivial solution $(0,0,0)$. Lets prove that there are no other solutions in rational numbers.

Let there be a nontrivial triple (x, y, z) of rational numbers satisfying the equation. Without loss of generality, we can consider the numbers integer, since you can always multiply both sides of the equality by the LCM (x, y, z) and get the integer solution.

Then $x\sqrt{2} + y\sqrt{3} = -z\sqrt{5}$. Squaring both sides of the equality, we get

$$a + b\sqrt{6} = c,$$

where $a = 2x^2 + 3y^2, b = 2xy, c = 5z^2$. Since x, y, z are integers, we have $b = c - a = 0$ due to the irrationality of $\sqrt{6}$. From $b = 0$ it follows that either $x = 0$ or $y = 0$ – these cases are dealt with in the same way, so for brevity we put $x = 0$. The equation $c - a = 0$ takes the form $5z^2 = 3y^2$ for non-zero (by our assumption) y and z. Hence, $(\frac{y}{z})^2 = \frac{5}{3}$, which is impossible due to the irrationality of $\sqrt{\frac{5}{3}}$.

Thus, our assumption was incorrect, and the original equation has no nontrivial solutions.

Answer: $(0, 0, 0)$

11-12 класс, задача №1 (краткий числовой ответ, 2 балла)
11-12 degree, task 1 (short answer, 2 points)

1. Найдите наибольший общий делитель всех чисел вида $n^7 - n$, где n - произвольное натуральное число.

   Find greatest common divisor of all numbers $a = n^7 - n$, where n is a positive integer.

2. Найдите наибольший общий делитель всех чисел вида $n^{13} - n$, где n - произвольное натуральное число.

   Find greatest common divisor of all numbers $a = n^{13} - n$, where n is a positive integer.

3. Найдите наибольший общий делитель всех чисел вида $n^5 - n$, где n - произвольное натуральное число.

   Find greatest common divisor of all numbers $a = n^5 - n$, where n is a positive integer.

4. Найдите наибольший общий делитель всех чисел вида $n^{11} - n$, где n - произвольное натуральное число.

   Find greatest common divisor of all numbers $a = n^{11} - n$, where n is a positive integer.

11-12 класс, задача №2 (краткий числовой ответ, 4 балла)
11-12 degree, task 2 (short answer, 4 points)

1. Число 6 является седьмым членом арифметической прогрессии, разность которой такова, что произведение пятого и одиннадцатого ее членов имеет максимальное возможное значение именно при данном значении ее разности. Найдите разность этой прогрессии. Представьте ответ в виде десятичной дроби, округлив ее до сотых.

   The number 6 is the 7th term of an arithmetic progression. The difference of the progression is such that the product of its 5th and 11th terms is biggest with this difference. Find the difference and represent your result as a decimal rounded to the nearest hundredth.

2. Число 6 является девятым членом арифметической прогрессии, разность которой такова, что произведение пятого и семнадцатого ее членов имеет максимальное возможное значение именно при данном значении ее разности. Найдите разность этой прогрессии. Представьте ответ в виде десятичной дроби, округлив ее до сотых.

   The number 6 is the 9th term of an arithmetic progression. The difference of the progression is such that the product of its 5th and 17th terms is biggest with this difference. Find the difference and represent your result as a decimal rounded to the nearest hundredth.

3. Число 6 является восьмым членом арифметической прогрессии, разность которой такова, что произведение третьего и четырнадцатого ее членов имеет максимальное возможное значение именно при данном значении ее разности. Найдите разность этой прогрессии. Представьте ответ в виде десятичной дроби, округлив ее до сотых.

   The number 6 is the 8th term of an arithmetic progression. The difference of the progression is such that the product of its 3rd and 14th terms is biggest with this difference. Find the difference and represent your result as a decimal rounded to the nearest hundredth.

4. Число 6 является шестым членом арифметической прогрессии, разность которой такова, что произведение четвертого и девятого ее членов имеет максимальное возможное значение именно при данном значении ее разности. Найдите разность этой прогрессии. Представьте ответ в виде десятичной дроби, округлив ее до сотых.

   The number 6 is the 6th term of an arithmetic progression. The difference of the progression is such that the product of its 4th and 9th terms is biggest with this difference. Find the difference and represent your result as a decimal rounded to the nearest hundredth.

11-12 класс, задача №3 (краткий ответ, 4 балла)
11-12 degree, task 3 (short answer, 4 points)

1. Найти количество троек целых чисел $x \le y \le z$, таких, что $x + y + z = x^3 + y^3 + z^3 = 2$.

   Find the number of triples $x \le y \le z$ such that $x + y + z = x^3 + y^3 + z^3 = 2$.

2. Найти количество троек целых чисел $x \le y \le z$, таких, что $x + y + z = x^3 + y^3 + z^3 = 3$.

   Find the number of triples $x \le y \le z$ such that $x + y + z = x^3 + y^3 + z^3 = 3$.

3. Найти количество троек целых чисел $x \le y \le z$, таких, что $x + y + z = 2$ и $x^3 + y^3 + z^3 = 5$.

   Find the number of triples $x \le y \le z$ such that $x + y + z = 2$ and $x^3 + y^3 + z^3 = 5$.

4. Найти количество троек целых чисел $x \le y \le z$, таких, что $x + y + z = 3$ и $x^3 + y^3 + z^3 = 24$.

   Find the number of triples $x \le y \le z$ such that $x + y + z = 3$ and $x^3 + y^3 + z^3 = 24$.

11-12 класс, задача №4 (краткий ответ, 5 баллов)
11-12 degree, task 4 (short answer, 5 points)

1. Весом натурального числа n назовем величину $k^2 + k + 1$, где k - показатель степени, с которым 2 входит в разложение n в произведение простых чисел. Например, вес числа 1 равен 1 (т.е. $0^2 + 0 + 1$), а вес числа 4 равен 7 (т.е. $2^2 + 2 + 1$). Весом отрезка чисел $[1, n]$ назовем сумму весов всех натуральных чисел от 1 до n. Найдите минимальное n, при котором вес отрезка $[1, n]$ больше или равен 1000.

   Let the weight of a positive integer n be the value $k^2 + k + 1$, where k is the power of 2 in factorization of n into the product of primes. For example, the weight of 1 is 1 (because 0^2+0+1) and the weight of number 4 is 7 (because $2^2 + 2 + 1$). Let the weight of a segment $[1, n]$ be the sum of weights of all positive integers from 1 to n. Find smallest n such that the weight of $[1, n]$ is bigger than or equal to 1000.

2. Весом натурального числа n назовем величину $k^2 + k + 1$, где k - показатель степени, с которым 2 входит в разложение n в произведение простых чисел. Например, вес числа 1 равен 1 (т.е. $0^2 + 0 + 1$), а вес числа 4 равен 7 (т.е. $2^2 + 2 + 1$). Весом отрезка чисел $[1, n]$ назовем сумму весов всех натуральных чисел от 1 до n. Найдите минимальное n, при котором вес отрезка $[1, n]$ больше или равен 1200.

Let the weight of a positive integer n be the value k^2+k+1, where k is the power of 2 in factorization of n into the product of primes. For example, the weight of 1 is 1 (because 0^2+0+1) and the weight of number 4 is 7 (because 2^2+2+1). Let the weight of a segment $[1,n]$ be the sum of weights of all positive integers from 1 to n. Find smallest n such that the weight of $[1,n]$ is bigger than or equal to 1200.

3. Весом натурального числа n назовем величину k^2+k+1, где k - показатель степени, с которым 2 входит в разложение n в произведение простых чисел. Например, вес числа 1 равен 1 (т.е. 0^2+0+1), а вес числа 4 равен 7 (т.е. 2^2+2+1). Весом отрезка чисел $[1,n]$ назовем сумму весов всех натуральных чисел от 1 до n. Найдите минимальное n, при котором вес отрезка $[1,n]$ больше или равен 1400.

   Let the weight of a positive integer n be the value k^2+k+1, where k is the power of 2 in factorization of n into the product of primes. For example, the weight of 1 is 1 (because 0^2+0+1) and the weight of number 4 is 7 (because 2^2+2+1). Let the weight of a segment $[1,n]$ be the sum of weights of all positive integers from 1 to n. Find smallest n such that the weight of $[1,n]$ is bigger than or equal to 1400.

4. Весом натурального числа n назовем величину k^2+k+1, где k - показатель степени, с которым 2 входит в разложение n в произведение простых чисел. Например, вес числа 1 равен 1 (т.е. 0^2+0+1), а вес числа 4 равен 7 (т.е. 2^2+2+1). Весом отрезка чисел $[1,n]$ назовем сумму весов всех натуральных чисел от 1 до n. Найдите минимальное n, при котором вес отрезка $[1,n]$ больше или равен 1600.

   Let the weight of a positive integer n be the value k^2+k+1, where k is the power of 2 in factorization of n into the product of primes. For example, the weight of 1 is 1 (because 0^2+0+1) and the weight of number 4 is 7 (because 2^2+2+1). Let the weight of a segment $[1,n]$ be the sum of weights of all positive integers from 1 to n. Find smallest n such that the weight of $[1,n]$ is bigger than or equal to 1600.

11-12 класс, задача №5 (развернутый ответ, 6 баллов)
11-12 degree, task 5 (detailed answer, 6 points)

1. Решите уравнение $x\sqrt{2}+y\sqrt{7}=z$ в рациональных числах.

   Find all rational solutions of the equation: $x\sqrt{2}+y\sqrt{7}=z$

2. Решите уравнение $x\sqrt{3}+y\sqrt{5}=z$ в рациональных числах.

   Find all rational solutions of the equation: $x\sqrt{3}+y\sqrt{5}=z$

3. Решите уравнение $x\sqrt{3}+y\sqrt{11}=z$ в рациональных числах.

   Find all rational solutions of the equation: $x\sqrt{3}+y\sqrt{11}=z$

4. Решите уравнение $x\sqrt{5}+y\sqrt{11}=z$ в рациональных числах.

   Find all rational solutions of the equation: $x\sqrt{5}+y\sqrt{11}=z$

11-12 класс, задача №6 (развернутый ответ, 8 баллов)
11-12 degree, task 6 (detailed answer, 8 points)

1. Четыре грани некоторого тетраэдра - это равные неравнобедренные треугольники со сторонами x, y и z, а радиус сферы, описанной около этого тетраэдра, равен 1. Вычислите величину $x^2+y^2+z^2$.

   All faces of a tetrahedron are equal non-isosceles triangles with sides x, y, and z. Radius of the sphere which all vertices of the tetrahedron lie on is 1. Find the value of $x^2+y^2+z^2$.

2. Четыре грани некоторого тетраэдра - это равные неравнобедренные треугольники со сторонами x, y и z, а радиус сферы, описанной около этого тетраэдра, равен 5. Вычислите величину $x^2 + y^2 + z^2$.

   All faces of a tetrahedron are equal non-isosceles triangles with sides x, y, and z. Radius of the sphere which all vertices of the tetrahedron lie on is 5. Find the value of $x^2 + y^2 + z^2$.

3. Четыре грани некоторого тетраэдра - это равные неравнобедренные треугольники со сторонами x, y и z, а радиус сферы, описанной около этого тетраэдра, равен 2. Вычислите величину $x^2 + y^2 + z^2$.

   All faces of a tetrahedron are equal non-isosceles triangles with sides x, y, and z. Radius of the sphere which all vertices of the tetrahedron lie on is 2. Find the value of $x^2 + y^2 + z^2$.

4. Четыре грани некоторого тетраэдра - это равные неравнобедренные треугольники со сторонами x, y и z, а радиус сферы, описанной около этого тетраэдра, равен 4. Вычислите величину $x^2 + y^2 + z^2$.

   All faces of a tetrahedron are equal non-isosceles triangles with sides x, y, and z. Radius of the sphere which all vertices of the tetrahedron lie on is 4. Find the value of $x^2 + y^2 + z^2$.

11-12 класс. Разбор задач
11-12 degree. Solution of tasks

Task 1. Найдите наибольший общий делитель всех чисел вида $n^{13} - n$, где n - произвольное натуральное число.

Find greatest common divisor of all numbers $a = n^{13} - n$, where n is a positive integer.

Solution (RUS). Заметим, что $2^{13} - 2 = 2 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 13$, поэтому искомый НОД является делителем этого числа. Также наш НОД не делится на 9, т.к. на 9 не делится число $3^{13} - 3$, поэтому НОД не больше $2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 13$. Но на каждое из этих простых чисел число $n^{13} - n$ делится по малой теореме Ферма. Значит, это и есть искомый НОД.

Answer: 2730

Solution (ENG). Note that $2^{13} - 2 = 2 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 13$, so the required GCD is a divisor of this number. Also, our GCD is not divisible by 9, because the number $3^{13} - 3$ is not divisible by 9, so the GCD is less than or equal to $2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 13$. The number $n^{13} - n$ is divisible by each of these primes by Fermat's little theorem. So this is the desired GCD.

Answer: 2730

Task 2. Число 6 является седьмым членом арифметической прогрессии, разность которой такова, что произведение пятого и одиннадцатого ее членов имеет максимальное возможное значение именно при данном значении ее разности. Найдите разность этой прогрессии. Представьте ответ в виде десятичной дроби, округлив ее до сотых.

The number 6 is the 7th term of an arithmetic progression. The difference of the progression is such that the product of its 5th and 11th terms is biggest with this difference. Find the difference and represent your result as a decimal rounded to the nearest hundredth.

Solution (RUS). Общий член арифметической прогрессии задается формулой $x_n = x_0 + d \cdot n$, откуда $x_0 = 6 - 7d$. Далее $x_5 \cdot x_{11} = (6 - 2d)(6 + 4d) = 36 + 12d - 8d^2$. Эта квадратичная функция принимает максимальное значение (вершина параболы) при $d = \frac{3}{4} = 0.75$.

Answer: 0.75

Solution (ENG). Any term of an arithmetic progression is given by the formula $x_n = x_0 + d \cdot n$, whence $x_0 = 6 - 7d$. So, $x_5 \cdot x_{11} = (6 - 2d)(6 + 4d) = 36 + 12d - 8d^2$. This quadratic function takes its maximum value (the vertex of the parabola) at $d = \frac{3}{4} = 0.75$.

Answer: 0.75

Task 3. Найти количество троек целых чисел $x \le y \le z$, таких, что $x+y+z = x^3+y^3+z^3 = 3$.

Find the number of triples $x \le y \le z$ such that $x+y+z = x^3+y^3+z^3 = 3$.

Solution (RUS). Заметим, что

$$3(x+y)(y+z)(z+x) = (x+y+z)^3 - (x^3+y^3+z^3) = 24,$$

откуда $(x+y)(y+z)(z+x) = 8$. Т.к. $x \le 1 \le z$, то $z+y = 3-x \ge 2$.

Если $z+y=2$, то $x=1$ и $z=y=1$.

Если $z+y=4$, то $x=-1$ и $(z-1)(y-1)=2$. Получаем, что z и y разной четности – противоречие.

Если $z+y=8$, то $x=-5$ и $(z-5)(y-5)=1$, откуда $z=y=4$.

Answer: 2

Solution (ENG). Note that

$$3(x+y)(y+z)(z+x) = (x+y+z)^3 - (x^3+y^3+z^3) = 24,$$

so $(x+y)(y+z)(z+x) = 8$. Because of $x \le 1 \le z$ we have $z+y = 3-x \ge 2$.

If $z+y=2$ we have $x=1$ и $z=y=1$.

If $z+y=4$ we have $x=-1$ и $(z-1)(y-1)=2$. So, z and y are of different parity – impossible.

If $z+y=8$ we have $x=-5$ и $(z-5)(y-5)=1$, from which $z=y=4$.

Answer: 2

Task 4. Весом натурального числа n назовем величину k^2+k+1, где k - показатель степени, с которым 2 входит в разложение n в произведение простых чисел. Например, вес числа 1 равен 1 (т.е. 0^2+0+1), а вес числа 4 равен 7 (т.е. 2^2+2+1). Весом отрезка чисел $[1,n]$ назовем сумму весов всех натуральных чисел от 1 до n. Найдите минимальное n, при котором вес отрезка $[1,n]$ больше или равен 1000.

Let the weight of a positive integer n be the value k^2+k+1, where k is the power of 2 in factorization of n into the product of primes. For example, the weight of 1 is 1 (because 0^2+0+1) and the weight of number 4 is 7 (because 2^2+2+1). Let the weight of a segment $[1,n]$ be the sum of weights of all positive integers from 1 to n. Find smallest n such that the weight of $[1,n]$ is bigger than or equal to 1000.

Solution (RUS). Вычислим вес отрезка $[1,2^k]$ для произвольного натурального $k>1$ (при $k=0$ это 1, при $k=1$ это 4). Очевидно, что количество чисел с показателем 0 в этом диапазоне равно 2^{k-1}, с показателем 1 это будут в точности те из четных, что не делятся хотя бы на вторую степень двойки – таких ровно 2^{k-2}. Тех, что делятся на вторую степень, соответственно, 2^{k-3} и т.д. вплоть до тех, которые делятся ровно на $k-1$-ю и на k-ю степень числа 2. Тех и других – ровно одно число.

Таким образом, вес отрезка равен $S_k = 2^{k-1}p(0) + 2^{k-2}p(1) + \ldots + 2^0p(k-1) + 2^0p(k)$, где $p(i)$ – это вес числа с показателем двойки i. То есть $S_k = 2^{k-1}(0^2+0+1) + 2^{k-2}(1^2+1+1) + 2^{k-3}(2^2+2+1) + \ldots + 2^0((k-1)^2+(k-1)+1) + 2^0(k^2+k+1)$.

Для упрощения этой формулы применим равенство $i^2+i = 2i(i+1)/2 = 2(1+2+3+\ldots+i)$. Тогда $S_k = 2^{k-1}(2\cdot0+1) + 2^{k-2}(2\cdot1+1) + 2^{k-3}(2\cdot(1+2)+1) + \ldots + 2^0(2(1+2+\ldots+(k-1))+1) + 2^0(k^2+k+1)$. Эти суммы можно перегруппировать, вынеся общие множители вида $2i$ (а также отделив неформатный член $2^0(k^2+k+1)$ и по единице из каждой скобки):

$= \left[1\cdot2\cdot(2^{k-2}+2^{k-3}+\ldots+1) + 2\cdot2\cdot(2^{k-3}+\ldots+1) + \ldots + (k-1)\cdot2\cdot1\right] + (k^2+k+1) + (2^{k-1} + 2^{k-2} + \ldots + 2^0) =$

$2\left[(2^{k-1}-1) + 2(2^{k-2}-1) + 3(2^{k-3}-1) + \ldots + (k-1)(2^1-1) + k(2^0-1)\right] + (k^2+k+1) + (2^k-1)$

Выражение в квалратных скобках равно: $2^{k-1} + 2\cdot2^{k-2} + \ldots + k2^0 - (1+2+\ldots+k) =$ $\left((2^{k-1}+2^{k-2}+\ldots+1) + (2^{k-2}+2^{k-3}+\ldots+1) + \ldots + 2^0\right) - k(k+1)/2 = (2^k-1) + (2^{k-1}-1) + \ldots + (2^1-1) + (2^0-1) - k(k+1)/2 = (2^{k+1}-1) - (k+1) - k(k+1)/2.$

Подставляя обратно и приводя подобные, имеем: $S_k = 5\cdot2^k - 2k - 4$.

Тогда, если натурально n записывается как $2^{d_1} + 2^{d_2} + \ldots + 2^{d_t}$ для набора уменьшающихся показателей $d_1 > d_2 > \ldots > d_t$, то легко проверить, что вес отрезка $[1, n]$ равен сумме весов $S_{d_1} + S_{d_2} + \ldots + S_{d_t}$. Кроме того, отметим, что S_k, то есть вес отрезка $[1, 2^k]$ несколько меньше, чем $5 \cdot 2^k$.

Тогда далее легко вычислить, что вес отрезка $[1, 211]$, исходя из разложения $211 = 128 + 64 + 16 + 2 + 1$, меньше 1000, а вес отрезка $[1, 212]$ - больше.

Answer: 212

Solution (ENG). Lets calculate the weight of the segment $[1, 2^k]$ for an arbitrary positive integer $k > 1$ (for $k = 0$ this is 1, for $k = 1$ this is 4). Obviously, the number of numbers with exponent 0 in this range is equal to 2^{k-1}, with exponent 1 these will be exactly those of even ones that are not divisible by at least the second power of two - there are exactly 2^{k-2} of them. Those that are divisible by the second degree, respectively, 2^{k-3}, etc. up to those that are divisible by exactly the $k-1$-th and k-th powers of 2. Both are exactly one number each.

So, the weight of the segment is $S_k = 2^{k-1}p(0) + 2^{k-2}p(1) + \ldots + 2^0 p(k-1) + 2^0 p(k)$, where $p(i)$ is the weight of a number with i-th power of 2. So, $S_k = 2^{k-1}(0^2 + 0 + 1) + 2^{k-2}(1^2 + 1 + 1) + 2^{k-3}(2^2 + 2 + 1) + \ldots + 2^0((k-1)^2 + (k-1) + 1) + 2^0(k^2 + k + 1)$.

To simplify this formula, apply the equality $i^2 + i = 2i(i+1)/2 = 2(1 + 2 + 3 + \ldots + i)$. Then $S_k = 2^{k-1}(2\cdot 0+1) + 2^{k-2}(2\cdot 1+1) + 2^{k-3}(2\cdot(1+2)+1) + \ldots + 2^0(2(1+2+\ldots+(k-1))+1) + 2^0(k^2+k+1)$. These sums can be rearranged by removing common factors of the form $2i$ (and also separating the non-formatted term $2^0(k^2 + k + 1)$ and by 1 from each parenthesis):
$= \left[1 \cdot 2 \cdot (2^{k-2} + 2^{k-3} + \ldots + 1) + 2 \cdot 2 \cdot (2^{k-3} + \ldots + 1) + \ldots + (k-1) \cdot 2 \cdot 1\right] + (k^2 + k + 1) + (2^{k-1} + 2^{k-2} + \ldots + 2^0) =$
$2\left[(2^{k-1} - 1) + 2(2^{k-2} - 1) + 3(2^{k-3} - 1) + \ldots + (k-1)(2^1 - 1) + k(2^0 - 1)\right] + (k^2 + k + 1) + (2^k - 1)$
The expression in square brackets is: $2^{k-1} + 2 \cdot 2^{k-2} + \ldots + k2^0 - (1 + 2 + \ldots + k) =$
$\left((2^{k-1} + 2^{k-2} + \ldots + 1) + (2^{k-2} + 2^{k-3} + \ldots + 1) + \ldots + 2^0\right) - k(k+1)/2 = (2^k - 1) + (2^{k-1} - 1) + \ldots + (2^1 - 1) + (2^0 - 1) - k(k+1)/2 = (2^{k+1} - 1) - (k+1) - k(k+1)/2$.
Substituting back and bringing similar ones, we have: $S_k = 5 \cdot 2^k - 2k - 4$.

Then, if positive integer n is written as $2^{d_1} + 2^{d_2} + \ldots + 2^{d_t}$ for a set of decreasing exponents $d_1 > d_2 > \ldots > d_t$, then it is easy to check that the weight of the segment $[1, n]$ is equal to the sum of the weights $S_{d_1} + S_{d_2} + \ldots + S_{d_t}$. In addition, note that S_k, that is, the weight of the segment $[1, 2^k]$ is slightly less than $5 \cdot 2^k$.

Then it is easy to calculate that the weight of the segment $[1, 211]$ by the decomposition $211 = 128 + 64 + 16 + 2 + 1$ is less than 1000, and the weight of the segment $[1, 212]$ is greater.

Answer: 212

Task 5. Решите уравнение $x\sqrt{3} + y\sqrt{11} = z$ в рациональных числах.

Find all rational solutions of the equation: $x\sqrt{3} + y\sqrt{11} = z$

Solution (RUS). Очевидно, уравнение имеет тривиальное решение $(0, 0, 0)$. Докажем, что других решений в рациональных числах нет.

Пусть найдется нетривиальная тройка (x, y, z) рациональных чисел, удовлетворяющая уравнению. Без ограничения общности можно считать ее целой, т.к. всегда можно домножить обе части равенства на НОК(x, y, z) и получить целое решение.

Тогда $x\sqrt{3} = z - y\sqrt{11}$. Возведя обе части этого равенства в квадрат, получим

$$a\sqrt{11} = b,$$

где $a = 2zy, b = z^2 + 11y^2 - 3x^2$ –целые числа. Поскольку x, y, z – целые, имеем $a = b = 0$ ввиду иррациональности $\sqrt{11}$. Из $a = 0$ следует, что либо $z = 0$, либо $y = 0$. Если $y = 0$, то $(\frac{z}{x})^2 = 3$, что невозможно ввиду иррациональности $\sqrt{3}$. Если $z = 0$, то из $b = 0$ следует $(\frac{x}{y})^2 = -\frac{11}{3}$, что также невозможно из-за иррациональности $\sqrt{\frac{11}{3}}$.

Таким образом, наше предположение было неверно, и исходное уравнение не имеет нетривиальных решений.

Answer: $(0,0,0)$

Solution (ENG). Obviously, the equation has a trivial solution $(0,0,0)$. Lets prove that there are no other solutions in rational numbers.

Let there be a nontrivial triple (x,y,z) of rational numbers satisfying the equation. Without loss of generality, we can consider the numbers integer, since you can always multiply both sides of the equality by the LCM (x,y,z) and get the integer solution.

Then $x\sqrt{3} = z - y\sqrt{11}$. Having squared both sides of this equality, we get

$$a\sqrt{11} = b,$$

where $a = 2zy, b = z^2 + 11y^2 - 3x^2$ are integers. Since x,y,z are integers, we have $a = b = 0$ due to the irrationality of $\sqrt{11}$. From $a = 0$ it follows that either $z = 0$ or $y = 0$. If $y = 0$, then $(\frac{z}{x})^2 = 3$, which is impossible due to the irrationality of $\sqrt{3}$. If $z = 0$, then $b = 0$ implies $(\frac{x}{y})^2 = -\frac{11}{3}$, which is also impossible due to the irrationality of $\sqrt{\frac{11}{3}}$.

Thus, our assumption was incorrect, and the original equation has no nontrivial solutions.

Answer: $(0,0,0)$

Task 6. Четыре грани некоторого тетраэдра - это равные неравнобедренные треугольники со сторонами x, y и z, а радиус сферы, описанной около этого тетраэдра, равен 1. Вычислите величину $x^2+y^2+z^2$.

All faces of a tetrahedron are equal non-isosceles triangles with sides x, y, and z. Radius of the sphere which all vertices of the tetrahedron lie on is 1. Find the value of $x^2+y^2+z^2$.

Solution (ENG). 1. Сперва построим параллелепипед Π, в который данный тетраэдр $ABCD$ будет вписан. Для этого через каждое ребро тетраэдра проведем плоскость – биссектор внешнего двугранного угла. Докажем, что плоскости, проведенные через скрещивающиеся ребра данного тетраэдра, параллельны.

Рассмотрим пару плоскостей, проведенных через ребра AB и CD. В плоскости $\triangle ABC$ отметим точку C' (в той же полуплоскости относительно прямой AB, что и C) так, что $\triangle ABC = \triangle ABC'$. Аналогично строится точка D' в плоскости $\triangle ABD$. Тогда легко видеть, что $\triangle ABC = \triangle ABD', \triangle ABC' = \triangle ABD$. Тогда эти пары треугольников симметричны относительно внутреннего биссектора двугранного угла при ребре AB данного тетраэдра. В частности, точки C и D' симметричны, как и точки C' и D. Но тогда отрезки CD и DC' перпендикулярны этому биссектору и параллельны между собой. Значит, они параллельны биссектору α внешнего двугранного угла при ребре AB. Остается добавить, что отрезки CC' и DD' параллельны AB и друг другу.

Таким образом, $CC'DD'$ – параллелограмм, плоскость которого параллельна α. Значит, через ребро CD, являющееся диагональю этого параллелограмма, проходит плоскость, параллельная α, проходящей через скрещивающееся ребро AB. Очевидно, что аналогичная процедура, начинающаяся с биссектора β внешнего двугранного угла CD приводит к аналогичному результату: ребро AB оказывается принадлежащим плоскости, параллельной β, содержащей скрещивающееся ребро тетраэдра.

Однако, существует единственная пара параллельных ребер, содержащих скрещивающиеся ребра произвольного тетраэдра. Значит, построенные две пары параллельных плоскостей совпадают, и биссекторы α и β параллельны. Таким образом, построенные 6 биссекторов образуют параллелепипед Π.

2. Докажем, что центры вписанной и описанной сфер этого тетраэдра совпадают. Пусть O – центр описанной сферы, тогда проекция этой точки на плоскость каждой грани является центром описанной окружности этой грани. Тогда, согласно теореме Пифагора, радиус описанной сферы и радиус описанной окружности $\triangle BCD$ (ее центр – точка O_A) удовлетворяют условию $R^2 = OO_A^2 + R_A^2$. Так как все грани тетраэдра равны, радиусы их описанных окружностей также равны – значит, длины всех перпендикуляров из O на плоскости граней тетраэдра $(OO_A, OO_B, ...)$ равны между собой. Но тогда O является центром сферы, касающейся всех граней тетраэдра, т.е. вписанной в него.

3. Докажем, что перпендикуляры, построенные к граням параллелепипеда Π через центры этих граней, содержат центр описанной сферы O. Рассмотрим плоскость α, содержащую ребро AB: центр вписанной сферы принадлежит биссектору внутреннего двугранного угла при AB, т.е. принадлежит плоскости, перпендикулярной α и содержащей AB. Кроме того, $OA = OB$. Тогда перпендикуляр l_{AB}, проведенный через центр грани параллелепипеда, соответствующей ребру AB, проходит через середину диагонали этой грани, т.е. через середину AB. Но этот перпендикуляр содержится в плоскости ABO и является в ней срединным перпендикуляром к отрезку AB. Значит, l_{AB} содержит точку O. Аналогично, ее содержат перпендикуляры к другим граням параллелепипеда, построенные на их серединах.

В частности, это означает, что l_{AB} и l_{CD} параллельны друг другу и проходят через общую точку O, т.е. они совпадают. Значит, соответствующие грани параллелепипеда совмещаются параллельным переносом на вектор, лежащий на этой прямой. Значит, боковые ребра параллелепипеда перпендикулярны основаниям, т.е. Π - прямоугольный параллелепипед.

4. Отрезки a, b и c – длины различных диагоналей граней Π. Тогда, согласно теореме Пифагора, $a^2 + b^2 + c^2 = 2(x^2 + y^2 + z^2)$. Радиус описанной сферы равен $\frac{x^2+y^2+z^2}{4} = 1$. Значит, $a^2 + b^2 + c^2 = 8$.

Answer: 8

Solution (ENG). 1. Lets construct a parallelepiped Π into which the given tetrahedron $ABCD$ will be inscribed. To do this, draw a plane through each edge of the tetrahedron - the bisector of the external dihedral angle. Let us prove that the planes drawn through the crossing edges of this tetrahedron are parallel.

Consider a pair of planes through edges AB and CD. In the plane $\triangle ABC$ we mark the point C' (in the same half-plane relative to the straight line AB as C) so that $\triangle ABC = \triangle ABC'$. The point D' in the plane $\triangle ABD$ is constructed similarly. Then it is easy to see that $\triangle ABC = \triangle ABD', \triangle ABC' = \triangle ABD$. Then these pairs of triangles are symmetric with respect to the inner bisector of the dihedral angle at the edge AB of the given tetrahedron. In particular, the points C and D' are symmetric, as are the points C' and D. But then the segments CD and DC' are perpendicular to this bisector and parallel to each other. Hence, they are parallel to the bisector α of the outer dihedral angle at the edge AB. It remains to add that the segments CC' and DD' are parallel to AB and to each other.

Thus, $CC'DD'$ is a parallelogram whose plane is parallel to α. Hence, through the edge CD, which is the diagonal of this parallelogram, there is a plane parallel to α passing through the crossing edge AB. Obviously a similar procedure starting with the bisector β of the outer dihedral angle CD leads to a similar result: the edge AB turns out to belong to the plane parallel to β containing the crossing edge of the tetrahedron.

However, there is only one pair of parallel edges containing intersecting edges of an arbitrary tetrahedron. Hence, the constructed two pairs of parallel planes coincide, and the bisectors α and β are parallel. Thus, the constructed 6 bisectors form a parallelepiped Π.

2. Lets prove that the centers of the inscribed and circumscribed spheres of this tetrahedron coincide. Let O be the center of the circumscribed sphere, then the projection of this point onto the plane of each face is the center of the circumscribed circle of this face. Then, according to the Pythagorean theorem, the radius of the circumscribed sphere and the radius of the circumscribed circle of $\triangle BCD$ (its center is the point O_A) satisfy the condition $R^2 = OO_A^2 + R_A^2$. Since all the faces of the tetrahedron are equal, the radii of their circumscribed circles are also equal, which means that the lengths of all perpendiculars from O on the plane of the faces of the tetrahedron $(OO_A, OO_B, ...)$ are equal to each other. But then O is the center of the sphere touching all faces of the tetrahedron, i.e. inscribed in it.

3. Let us prove that the perpendiculars drawn to the faces of the parallelepiped Π through the centers of these faces contain the center of the circumscribed sphere O. Consider the plane α containing the edge AB: the center of the inscribed sphere belongs to the bisector of the inner dihedral at AB, that is, belongs to the plane perpendicular to α and containing AB. Also, $OA = OB$. Then the perpendicular l_{AB} drawn through the center of the face of the parallelepiped corresponding to the edge AB passes through the midpoint of the diagonal of this face, that is, through the middle of AB. But this perpendicular is contained in the plane ABO and is in it the median perpendicular to the segment AB. Hence, l_{AB} contains point O. Similarly, it is contained by perpendiculars to other faces of the

parallelepiped, drawn at their midpoints.

In particular, this means that l_{AB} and l_{CD} are parallel to each other and pass through a common point O, i.e. they match. This means that the corresponding faces of the parallelepiped are aligned by parallel transfer to a vector lying on this straight line. This means that the side edges of the parallelepiped are perpendicular to the bases, i.e. Π is a rectangular parallelepiped.

4. Segments a, b and c are the lengths of different diagonals of the faces Π. Then, according to the Pythagorean theorem, $a^2 + b^2 + c^2 = 2(x^2 + y^2 + z^2)$. The radius of the circumscribed sphere is $\frac{x^2+y^2+z^2}{4} = 1$. Hence, $a^2 + b^2 + c^2 = 8$.

Answer: 8

2 тур

2nd round

7-9 класс, задача №1 (краткий числовой ответ, 2 балла)

7-9 degree, task 1 (short answer, 2 points)

1. Найдите наименьшее возможное значение суммы $a + b$, где a и b - натуральные числа и $\frac{205}{206} < \frac{a}{b} < \frac{206}{207}$.

   Find minimum of $a + b$, where a and b are positive integers and $\frac{205}{206} < \frac{a}{b} < \frac{206}{207}$.

   824

2. Найдите наименьшее возможное значение суммы $a + b$, где a и b - натуральные числа и $\frac{311}{312} < \frac{a}{b} < \frac{312}{313}$.

   Find minimum of $a + b$, where a and b are positive integers and $\frac{311}{312} < \frac{a}{b} < \frac{312}{313}$.

   1248

3. Найдите наименьшее возможное значение суммы $a + b$, где a и b - натуральные числа и $\frac{403}{404} < \frac{a}{b} < \frac{404}{405}$.

   Find minimum of $a + b$, where a and b are positive integers and $\frac{403}{404} < \frac{a}{b} < \frac{404}{405}$.

   1616

4. Найдите наименьшее возможное значение суммы $a + b$, где a и b - натуральные числа и $\frac{554}{555} < \frac{a}{b} < \frac{555}{556}$.

   Find minimum of $a + b$, where a and b are positive integers and $\frac{554}{555} < \frac{a}{b} < \frac{555}{556}$.

   2220

7-9 класс, задача №2 (краткий числовой ответ, 3 балла)

7-9 degree, task 2 (short answer, 3 points)

1. Комиссия из 9 судей оценивает троих участников соревнования. Для этого каждый из судей выставляет лучшему, по его мнению, участнику, 3 балла, худшему – 1 балл, а оставшемуся – 2 балла. В результате все участники набрали разное количество очков. Один судья заметил, что победитель набрал меньше всего троек, а занявший последнее место – больше всего троек. Сколько двоек набрал победитель?

There are 9 judges to rate three competitors. To do that, each of the judges gives 3 points to the best (in his opinion) participant, 1 point for the worst and 2 points to the remaining one. As a result, all participants scored a different number of points. It happened that the winner received the least number of marks "3"and the looser received the most number of marks "3". How many judges rate the winner with mark "2"?

6

2. Комиссия из 9 судей оценивает троих участников соревнования. Для этого каждый из судей выставляет лучшему, по его мнению, участнику, 6 баллов, худшему – 2 балла, а оставшемуся – 4 балла. В результате все участники набрали разное количество очков. Один судья заметил, что победитель набрал меньше всего оценок "6 а занявший последнее место – больше всего оценок "6". Сколько оценок "4"набрал победитель?

   There are 9 judges to rate three competitors. To do that, each of the judges gives 6 points to the best (in his opinion) participant, 2 points for the worst and 4 points to the remaining one. As a result, all participants scored a different number of points. It happened that the winner received the least number of marks "6"and the looser received the most number of marks "6". How many judges rate the winner with mark "4"?

   6

3. Комиссия из N судей оценивает троих участников соревнования. Для этого каждый из судей выставляет лучшему, по его мнению, участнику, 3 балла, худшему – 1 балл, а оставшемуся – 2 балла. В результате все участники набрали разное количество очков. Один судья заметил, что победитель набрал меньше всего троек, а занявший последнее место – больше всего троек. Определите наименьшее возможное количество судей этого соревнования.

   There are N judges to rate three competitors. To do that, each of the judges gives 3 points to the best (in his opinion) participant, 1 point for the worst and 2 points to the remaining one. As a result, all participants scored a different number of points. It happened that the winner received the least number of marks "3"and the looser received the most number of marks "3". What is the smallest possible number N with all these conditions?

   9

4. Комиссия из N судей оценивает троих участников соревнования. Для этого каждый из судей выставляет лучшему, по его мнению, участнику, 6 баллов, худшему – 2 балла, а оставшемуся – 4 балла. В результате все участники набрали разное количество очков. Один судья заметил, что победитель набрал меньше всего оценок "6 а занявший последнее место – больше всего оценок "6". Определите наименьшее возможное количество судей этого соревнования.

   There are N judges to rate three competitors. To do that, each of the judges gives 6 points to the best (in his opinion) participant, 2 points for the worst and 4 points to the remaining one. As a result, all participants scored a different number of points. It happened that the winner received the least number of marks "6"and the looser received the most number of marks "6". What is the smallest possible number N with all these conditions?

   9

7-9 класс, задача №3 (краткий числовой ответ, 4 балла)
7-9 degree, task 3 (short answer, 4 points)

1. Точка D лежит внутри прямоугольного $\triangle ABC$ с прямым углом B. Пусть $S_{\triangle ABD}, S_{\triangle CBD}, S_{\triangle ABC}$ – площади $\triangle ABD, \triangle CBD, \triangle ABC$ соответственно. Известно, что $\frac{S_{\triangle ABD}}{S_{\triangle ABC}} = \frac{1}{2}, \frac{S_{\triangle CBD}}{S_{\triangle ABC}} = \frac{1}{5}$, а длины отрезков AD и CD равны соответственно 4 и 3. Найдите площадь квадрата, стороной которого является отрезок BD. Ответ округлите до ближайшего целого числа.

   Point D is inside $\triangle ABC$ with $\angle B = 90°$. Let $S_{\triangle ABD}, S_{\triangle CBD}, S_{\triangle ABC}$ be the areas of $\triangle ABD, \triangle CBD$, $\triangle ABC$ respectively. It is known that $\frac{S_{\triangle ABD}}{S_{\triangle ABC}} = \frac{1}{2}, \frac{S_{\triangle CBD}}{S_{\triangle ABC}} = \frac{1}{5}$ and $AD = 4, CD = 3$. Find the area of a square whose side is a segment BD. Round your answer to the nearest integer.

   63

2. Точка D лежит внутри прямоугольного $\triangle ABC$ с прямым углом B. Пусть $S_{\triangle ABD}, S_{\triangle CBD}, S_{\triangle ABC}$ – площади $\triangle ABD, \triangle CBD, \triangle ABC$ соответственно. Известно, что $\frac{S_{\triangle ABD}}{S_{\triangle ABC}} = \frac{1}{2}, \frac{S_{\triangle CBD}}{S_{\triangle ABC}} = \frac{1}{5}$, а длины отрезков AD и CD равны соответственно 4 и 5. Найдите площадь квадрата, стороной которого является отрезок BD. Ответ округлите до ближайшего целого числа.

   Point D is inside $\triangle ABC$ with $\angle B = 90°$. Let $S_{\triangle ABD}, S_{\triangle CBD}, S_{\triangle ABC}$ be the areas of $\triangle ABD, \triangle CBD$, $\triangle ABC$ respectively. It is known that $\frac{S_{\triangle ABD}}{S_{\triangle ABC}} = \frac{1}{2}, \frac{S_{\triangle CBD}}{S_{\triangle ABC}} = \frac{1}{5}$ and $AD = 4, CD = 5$. Find the area of a square whose side is a segment BD. Round your answer to the nearest integer.

   131

3. Точка D лежит внутри прямоугольного $\triangle ABC$ с прямым углом B. Пусть $S_{\triangle ABD}, S_{\triangle CBD}, S_{\triangle ABC}$ – площади $\triangle ABD, \triangle CBD, \triangle ABC$ соответственно. Известно, что $\frac{S_{\triangle ABD}}{S_{\triangle ABC}} = \frac{1}{2}, \frac{S_{\triangle CBD}}{S_{\triangle ABC}} = \frac{1}{5}$, а длины отрезков AD и CD равны соответственно 3 и 4. Найдите площадь квадрата, стороной которого является отрезок BD. Ответ округлите до ближайшего целого числа.

   Point D is inside $\triangle ABC$ with $\angle B = 90°$. Let $S_{\triangle ABD}, S_{\triangle CBD}, S_{\triangle ABC}$ be the areas of $\triangle ABD, \triangle CBD$, $\triangle ABC$ respectively. It is known that $\frac{S_{\triangle ABD}}{S_{\triangle ABC}} = \frac{1}{2}, \frac{S_{\triangle CBD}}{S_{\triangle ABC}} = \frac{1}{5}$ and $AD = 3, CD = 4$. Find the area of a square whose side is a segment BD. Round your answer to the nearest integer.

   82

4. Точка D лежит внутри прямоугольного $\triangle ABC$ с прямым углом B. Пусть $S_{\triangle ABD}, S_{\triangle CBD}, S_{\triangle ABC}$ – площади $\triangle ABD, \triangle CBD, \triangle ABC$ соответственно. Известно, что $\frac{S_{\triangle ABD}}{S_{\triangle ABC}} = \frac{1}{2}, \frac{S_{\triangle CBD}}{S_{\triangle ABC}} = \frac{1}{5}$, а длины отрезков AD и CD равны соответственно 5 и 4. Найдите площадь квадрата, стороной которого является отрезок BD. Ответ округлите до ближайшего целого числа.

   Point D is inside $\triangle ABC$ with $\angle B = 90°$. Let $S_{\triangle ABD}, S_{\triangle CBD}, S_{\triangle ABC}$ be the areas of $\triangle ABD, \triangle CBD$, $\triangle ABC$ respectively. It is known that $\frac{S_{\triangle ABD}}{S_{\triangle ABC}} = \frac{1}{2}, \frac{S_{\triangle CBD}}{S_{\triangle ABC}} = \frac{1}{5}$ and $AD = 5, CD = 4$. Find the area of a square whose side is a segment BD. Round your answer to the nearest integer.

   107

7-9 класс, задача №4 (краткий числовой ответ, 4 балла)
7-9 degree, task 4 (short answer, 4 points)

1. В ряд записаны 1234 целых числа. За один шаг первый игрок указывает на несколько из них, записанных подряд, а второй игрок либо увеличивает каждое из указанных чисел на 1, либо уменьшает каждое из них на 1. Найдите наибольшее k, такое, для которого первый всегда за несколько шагов сможет добиться, чтобы хотя бы k чисел стали делиться на 3.

There is a row of 1234 integers. In one step, the first player points to several of them written one-by-another, and the second player for each of the numbers increases it by 1 or decreases it by 1. Find the largest k, such that the first player can always make at least k numbers be divisible by 3.

1233

2. В ряд записаны 4321 целое число. За один шаг первый игрок указывает на несколько из них, записанных подряд, а второй игрок либо увеличивает каждое из указанных чисел на 1, либо уменьшает каждое из них на 1. Найдите наибольшее k, такое, для которого первый всегда за несколько шагов сможет добиться, чтобы хотя бы k чисел стали делиться на 3.

   There is a row of 4321 integers. In one step, the first player points to several of them written one-by-another, and the second player for each of the numbers increases it by 1 or decreases it by 1. Find the largest k, such that the first player can always make at least k numbers be divisible by 3.

   4320

3. В ряд записаны 3333 целых числа. За один шаг первый игрок указывает на несколько из них, записанных подряд, а второй игрок либо увеличивает каждое из указанных чисел на 1, либо уменьшает каждое из них на 1. Найдите наибольшее k, такое, для которого первый всегда за несколько шагов сможет добиться, чтобы хотя бы k чисел стали делиться на 3.

   There is a row of 3333 integers. In one step, the first player points to several of them written one-by-another, and the second player for each of the numbers increases it by 1 or decreases it by 1. Find the largest k, such that the first player can always make at least k numbers be divisible by 3.

   3332

4. В ряд записаны 5555 целых чисел. За один шаг первый игрок указывает на несколько из них, записанных подряд, а второй игрок либо увеличивает каждое из указанных чисел на 1, либо уменьшает каждое из них на 1. Найдите наибольшее k, такое, для которого первый всегда за несколько шагов сможет добиться, чтобы хотя бы k чисел стали делиться на 3.

   There is a row of 5555 integers. In one step, the first player points to several of them written one-by-another, and the second player for each of the numbers increases it by 1 or decreases it by 1. Find the largest k, such that the first player can always make at least k numbers be divisible by 3.

   5554

7-9 класс, задача №5 (развернутое решение, 6 баллов)
7-9 degree, task 5 (detailed answer, 6 points)

1. Дан 11-угольник $A_1A_2\dots A_{11}$ и последовательность точек $X_0, X_1, X_2, \dots$ на сторонах этого многоугольника, такая, что точка X_0 лежит на стороне A_1A_{11} и для любого целого $k \geq 0$ точка X_{11k+1} – на стороне A_1A_2, точка X_{11k+2} – на стороне A_2A_3, $\dots$, точка $X_{11(k+1)}$ – на стороне $A_{11}A_1$, причем $A_1X_{11k} = A_1X_{11k+1}, A_2X_{11k+1} = A_2X_{11k+2}, A_3X_{11k+2} = A_3X_{11k+3}, \dots, A_{11}X_{11k+10} = A_{11}X_{11(k+1)}$. Докажите, что последовательность точек $X_0, X_1, X_2, \dots$ состоит из конечного множества точек. Укажите верхнюю границу для числа n различных точек в этой последовательности и покажите, что эта граница достижима (то есть существует такой многоугольник $A_1A_2\dots A_{11}$ и последовательность точек $X_0, X_1, X_2, \dots$, построенная по описанным правилам, в которой ровно n различных точек).

There is a sequence of points $X_0, X_1, X_2, \ldots$ on sides of a polygon $A_1A_2\ldots A_{11}$ such that X_0 lies on A_1A_{11} and for any non-negative integer k point X_{11k+1} lies on A_1A_2, point X_{11k+2} lies on A_2A_3, $\ldots$, and point $X_{11(k+1)}$ lies on $A_{11}A_1$. It is gives that $A_1X_{11k} = A_1X_{11k+1}, A_2X_{11k+1} = A_2X_{11k+2}, A_3X_{11k+2} = A_3X_{11k+3}, \ldots, A_{11}X_{11k+10} = A_{11}X_{11(k+1)}$ for any integer $k \geq 0$. Prove that the sequence $X_0, X_1, X_2, \ldots$ contains a finite number of points. What number is it? Show that the number is achievable on some polygon with 11 sides.

2. Дан 15-угольник $A_1A_2\ldots A_{15}$ и последовательность точек $X_0, X_1, X_2, \ldots$ на сторонах этого многоугольника, такая, что точка X_0 лежит на стороне A_1A_{15} и для любого целого $k \geq 0$ точка X_{15k+1} – на стороне A_1A_2, точка X_{15k+2} – на стороне A_2A_3, $\ldots$, точка $X_{15(k+1)}$ – на стороне $A_{15}A_1$, причем $A_1X_{15k} = A_1X_{15k+1}, A_2X_{15k+1} = A_2X_{15k+2}, A_3X_{15k+2} = A_3X_{15k+3}, \ldots, A_{15}X_{15k+14} = A_{15}X_{15(k+1)}$. Докажите, что последовательность точек $X_0, X_1, X_2, \ldots$ состоит из конечного множества точек. Укажите верхнюю границу для числа n различных точек в этой последовательности и покажите, что эта граница достижима (то есть существует такой многоугольник $A_1A_2\ldots A_{15}$ и последовательность точек $X_0, X_1, X_2, \ldots$, построенная по описанным правилам, в которой ровно n различных точек).

There is a sequence of points $X_0, X_1, X_2, \ldots$ on sides of a polygon $A_1A_2\ldots A_{15}$ such that X_0 lies on A_1A_{15} and for any non-negative integer k point X_{15k+1} lies on A_1A_2, point X_{15k+2} lies on A_2A_3, $\ldots$, and point $X_{15(k+1)}$ lies on $A_{15}A_1$. It is gives that $A_1X_{15k} = A_1X_{15k+1}, A_2X_{15k+1} = A_2X_{15k+2}, A_3X_{15k+2} = A_3X_{15k+3}, \ldots, A_{15}X_{15k+14} = A_{15}X_{15(k+1)}$ for any integer $k \geq 0$. Prove that the sequence $X_0, X_1, X_2, \ldots$ contains a finite number of points. What number is it? Show that the number is achievable on some polygon with 15 sides.

3. Дан 13-угольник $A_1A_2\ldots A_{13}$ и последовательность точек $X_0, X_1, X_2, \ldots$ на сторонах этого многоугольника, такая, что точка X_0 лежит на стороне A_1A_{13} и для любого целого $k \geq 0$ точка X_{13k+1} – на стороне A_1A_2, точка X_{13k+2} – на стороне A_2A_3, $\ldots$, точка $X_{13(k+1)}$ – на стороне $A_{13}A_1$, причем $A_1X_{13k} = A_1X_{13k+1}, A_2X_{13k+1} = A_2X_{13k+2}, A_3X_{13k+2} = A_3X_{13k+3}, \ldots, A_{13}X_{13k+12} = A_{13}X_{13(k+1)}$. Докажите, что последовательность точек $X_0, X_1, X_2, \ldots$ состоит из конечного множества точек. Укажите верхнюю границу для числа n различных точек в этой последовательности и покажите, что эта граница достижима (то есть существует такой многоугольник $A_1A_2\ldots A_{13}$ и последовательность точек $X_0, X_1, X_2, \ldots$, построенная по описанным правилам, в которой ровно n различных точек).

There is a sequence of points $X_0, X_1, X_2, \ldots$ on sides of a polygon $A_1A_2\ldots A_{13}$ such that X_0 lies on A_1A_{13} and for any non-negative integer k point X_{13k+1} lies on A_1A_2, point X_{13k+2} lies on A_2A_3, $\ldots$, and point $X_{13(k+1)}$ lies on $A_{13}A_1$. It is gives that $A_1X_{13k} = A_1X_{13k+1}, A_2X_{13k+1} = A_2X_{13k+2}, A_3X_{13k+2} = A_3X_{13k+3}, \ldots, A_{13}X_{13k+12} = A_{13}X_{13(k+1)}$ for any integer $k \geq 0$. Prove that the sequence $X_0, X_1, X_2, \ldots$ contains a finite number of points. What number is it? Show that the number is achievable on some polygon with 13 sides.

4. Дан 19-угольник $A_1A_2\ldots A_{19}$ и последовательность точек $X_0, X_1, X_2, \ldots$ на сторонах этого многоугольника, такая, что точка X_0 лежит на стороне A_1A_{19} и для любого целого $k \geq 0$ точка X_{19k+1} – на стороне A_1A_2, точка X_{19k+2} – на стороне A_2A_3, $\ldots$, точка $X_{19(k+1)}$ – на стороне $A_{19}A_1$, причем $A_1X_{19k} = A_1X_{19k+1}, A_2X_{19k+1} = A_2X_{19k+2}, A_3X_{19k+2} = A_3X_{19k+3}, \ldots, A_{19}X_{19k+18} = A_{19}X_{19(k+1)}$. Докажите, что последовательность точек $X_0, X_1, X_2, \ldots$ состоит из конечного множества точек. Укажите верхнюю границу для числа n различных точек в

этой последовательности и покажите, что эта граница достижима (то есть существует такой многоугольник $A_1A_2 \ldots A_{19}$ и последовательность точек $X_0, X_1, X_2, \ldots$, построенная по описанным правилам, в которой ровно n различных точек).

There is a sequence of points $X_0, X_1, X_2, \ldots$ on sides of a polygon $A_1A_2 \ldots A_{19}$ such that X_0 lies on A_1A_{19} and for any non-negative integer k point X_{19k+1} lies on A_1A_2, point X_{19k+2} lies on A_2A_3, $\ldots$, and point $X_{19(k+1)}$ lies on $A_{19}A_1$. It is gives that $A_1X_{19k} = A_1X_{19k+1}, A_2X_{19k+1} = A_2X_{19k+2}, A_3X_{19k+2} = A_3X_{19k+3}, \ldots, A_{19}X_{19k+18} = A_{19}X_{19(k+1)}$ for any integer $k \geq 0$. Prove that the sequence $X_0, X_1, X_2, \ldots$ contains a finite number of points. What number is it? Show that the number is achievable on some polygon with 19 sides.

7-9 класс, задача №6 (развернутое решение, 8 баллов)
7-9 degree, task 6 (detailed answer, 8 points)

1. Вещественные числа x, y, z удовлетворяют соотношениям $x + y + z = x^2 + y^2 + z^2 = 2$. Докажите, что среди этих чисел найдутся два, расстояние между которыми не меньше 1.

   Real numbers x, y, z satisfy $x + y + z = x^2 + y^2 + z^2 = 2$. Prove that there are two of the numbers with the distance between them at least 1.

2. Вещественные числа x, y, z удовлетворяют соотношениям $x + y + z = 7, x^2 + y^2 + z^2 = 17$. Докажите, что среди этих чисел найдутся два, расстояние между которыми не меньше 1.

   Real numbers x, y, z satisfy $x + y + z = 7, x^2 + y^2 + z^2 = 17$. Prove that there are two of the numbers with the distance between them at least 1.

3. Вещественные числа x, y, z удовлетворяют соотношениям $x + y + z = 4, x^2 + y^2 + z^2 = 6$. Докажите, что среди этих чисел найдутся два, расстояние между которыми не меньше 1.

   Real numbers x, y, z satisfy $x + y + z = 4, x^2 + y^2 + z^2 = 6$. Prove that there are two of the numbers with the distance between them at least 1.

4. Вещественные числа x, y, z удовлетворяют соотношениям $x + y + z = 5, x^2 + y^2 + z^2 = 9$. Докажите, что среди этих чисел найдутся два, расстояние между которыми не меньше 1.

   Real numbers x, y, z satisfy $x + y + z = 5, x^2 + y^2 + z^2 = 9$. Prove that there are two of the numbers with the distance between them at least 1.

7-9 класс. Разбор задач
7-9 degree. Solution of tasks

Task 7. Найдите наименьшее возможное значение суммы $a + b$, где a и b - натуральные числа и $\frac{205}{206} < \frac{a}{b} < \frac{206}{207}$.

Find minimum of $a + b$, where a and b are positive integers and $\frac{205}{206} < \frac{a}{b} < \frac{206}{207}$.

Solution (RUS). Докажем, что $b - a \geq 2$:

$$\frac{205}{206} < \frac{a}{b} < \frac{206}{207}$$

$$\frac{207}{206} < \frac{b}{a} < \frac{206}{205}$$

Вычитая 1, получим

$$\frac{1}{206} < \frac{b-a}{a} < \frac{1}{205}$$

Учитывая, что $b > a$, т.е. $b \geq a+1$, предположим, что $b = a+1$. Тогда $205 < a < 206$, что невозможно для натурального a. Значит, $b > a+1$, т.е. $b - a \geq 2$.
Тогда $a \geq 2 \cdot 205 + 1 = 411$ и $b \geq 413$. Легко убедиться, что пара $a = 411, b = 413$ удовлетворяет условию задачи. Согласно доказанному выше, эта пара даст минимальную сумму $a + b$.

Solution (ENG). Lets prove that $b - a \geq 2$:

$$\frac{205}{206} < \frac{a}{b} < \frac{206}{207}$$

$$\frac{207}{206} < \frac{b}{a} < \frac{206}{205}$$

By subtracting 1 we get

$$\frac{1}{206} < \frac{b-a}{a} < \frac{1}{205}$$

It is obvious that $b > a$, so $b \geq a+1$. Let $b = a+1$. Then $205 < a < 206$ which is impossible for integer a. Thus, $b > a+1$ and $b - a \geq 2$.
Then $a \geq 2 \cdot 205 + 1 = 411$ and $b \geq 413$. It is easy to see that $a = 411, b = 413$ is an appropriate pair. Moreover, the pair has minimal sum $a + b$ because $a \geq 411$.

Answer: 824

Task 8. Комиссия из 9 судей оценивает троих участников соревнования. Для этого каждый из судей выставляет лучшему, по его мнению, участнику, 3 балла, худшему – 1 балл, а оставшемуся – 2 балла. В результате все участники набрали разное количество очков. Один судья заметил, что победитель набрал меньше всего троек, а занявший последнее место – больше всего троек. Сколько двоек набрал победитель?

There are 9 judges to rate three competitors. To do that, each of the judges gives 3 points to the best (in his opinion) participant, 1 point for the worst and 2 points to the remaining one. As a result, all participants scored a different number of points. It happened that the winner received the least number of marks "3"and the looser received the most number of marks "3". How many judges rate the winner with mark "2"?

Solution (RUS). Всего было роздано $9 \cdot (1 + 2 + 3) = 54$ балла. Значит, победитель набрал не менее 19 баллов, а проигравший — не более 17 баллов. Если победитель набрал не более одной тройки, то проигравший набрал не менее 5 троек. Тогда проигравший заведомо набрал не менее $5 \cdot 3 + 4 \cdot 1 = 19$ баллов — противоречие.
Значит, победитель получил хотя бы 2 тройки. Но тогда занявший второй место получил хотя бы 3 тройки, а проигравший получил хотя бы 4 тройки — итого хотя бы 9 оценок. Но троек ровно 9, значит, победитель получил ровно 2 тройки, а проигравший — ровно 4 тройки. Тогда проигравший набрал хотя бы $4 \cdot 3 + 5 \cdot 1 = 17$ баллов. Но с другой стороны больше он набрать не мог. Значит, проигравший набрал 17 баллов. Тогда занявший второе место не мог набрать больше 18 баллов, иначе $17 + 19 + 20 > 54$. Поэтому занявший второе место набрал 18 баллов, а победитель — 19 баллов.
Если победитель набрал x двоек, то он набрал $7 - x$ единиц, откуда $(7 - x) \cdot 1 + x \cdot 2 + 2 \cdot 3 = 19$. решая это уравнение, находим $x = 6$.

Solution (ENG). There were $9 \cdot (1+2+3) = 54$ points given in total. Thus, the winner earned at least 19 points and the loser earned no more than 17 points. If the winner scored no more than one mark "3 then the loser scored at least 5 marks "3". Then the loser obviously scored at least $5 \cdot 3 + 4 \cdot 1 = 19$ points - a contradiction.
This means that the winner received at least 2 marks "3". But then the one who finished on the second position got at least 3 marks "3 and the loser got at least 4 marks "3 a total of at least 9 marks. But there are exactly 9 marks "3"given in total, which means that the winner got exactly 2 marks "3 and the loser got exactly 4 of the marks. Then the loser scored at least $4 \cdot 3 + 5 \cdot 1 = 17$ points. But on the other hand, he could not get more. This means that the loser scored 17 points. Then the one who is on the second position could not score more than 18 points, otherwise $17 + 19 + 20 > 54$. Therefore, he scored 18 points, and the winner got 19 points.
If the winner scored x marks "2 then he scored $7 - x$ marks "1 whence $(7 - x) \cdot 1 + x \cdot 2 + 2 \cdot 3 = 19$. By solving this equation we find $x = 6$.

Answer: 6

Task 9. Точка D лежит внутри прямоугольного $\triangle ABC$ с прямым углом B. Пусть $S_{\triangle ABD}, S_{\triangle CBD}, S_{\triangle ABC}$ – площади $\triangle ABD, \triangle CBD, \triangle ABC$ соответственно. Известно, что $\frac{S_{\triangle ABD}}{S_{\triangle ABC}} = \frac{1}{2}, \frac{S_{\triangle CBD}}{S_{\triangle ABC}} = \frac{1}{5}$, а длины отрезков AD и CD равны соответственно 4 и 3. Найдите площадь квадрата, стороной которого является отрезок BD. Ответ округлите до ближайшего целого числа.

Point D is inside $\triangle ABC$ with $\angle B = 90°$. Let $S_{\triangle ABD}, S_{\triangle CBD}, S_{\triangle ABC}$ be the areas of $\triangle ABD, \triangle CBD$, $\triangle ABC$ respectively. It is known that $\frac{S_{\triangle ABD}}{S_{\triangle ABC}} = \frac{1}{2}, \frac{S_{\triangle CBD}}{S_{\triangle ABC}} = \frac{1}{5}$ and $AD = 4, CD = 3$. Find the area of a square whose side is a segment BD. Round your answer to the nearest integer.

Solution (RUS). Для удобства решения задачи опусти высоты из точки D на стороны AB и CB и введем дополнительные следующие обозначения: пусть
x – длина стороны AB, а h_x – высота, опущенная на эту сторону;
y – длина стороны CB, а h_y – высота, опущенная на эту сторону;
b – длина отрезка BD;
$m = \frac{1}{2}, n = \frac{1}{5}$.
Имеем:
$S_{ABD} = \frac{x \cdot h_x}{2} = m \cdot S_{ABC} = m \cdot \frac{xy}{2}$; следовательно, $h_x = m \cdot y$;
$S_{CBD} = \frac{y \cdot h_y}{2} = n \cdot S_{ABC} = n \cdot \frac{xy}{2}$; следовательно, $h_y = n \cdot x$.
Далее имеем:
$a^2 = (x - h_y)^2 + h_x^2 = (1-n)^2 x^2 + m^2 y^2$,
$c^2 = h_y^2 + (y - h_x)^2 = n^2 x^2 + (1-m)^2 y^2$.
Отсюда (так как $m^2 n^2 - (1-m)^2 (1-n)^2 \neq 0$): $x^2 = \frac{m^2 c^2 - (1-m)^2 a^2}{m^2 n^2 - (1-m)^2 (1-n)^2}$,
$y^2 = \frac{n^2 a^2 - (1-n)^2 c^2}{m^2 n^2 - (1-m)^2 (1-n)^2}$.
Поэтому $b^2 = h_x^2 + h_y^2 = m^2 y^2 + n^2 x^2 = m^2 \frac{n^2 a^2 - (1-n)^2 c^2}{m^2 n^2 - (1-m)^2 (1-n)^2} + n^2 \frac{m^2 c^2 - (1-m)^2 a^2}{m^2 n^2 - (1-m)^2 (1-n)^2}$. Отсюда находим $b^2 = m^2 \frac{n^2 a^2 - (1-n)^2 c^2}{m^2 n^2 - (1-m)^2 (1-n)^2} + n^2 \frac{m^2 c^2 - (1-m)^2 a^2}{m^2 n^2 - (1-m)^2 (1-n)^2}$.

Solution (ENG). Lets throw perpendiculars from point D to the segments AB and CB. Let
x be the length of AB, and h_x be the length pf the perpendicular to the side;
y be the length of CB, and h_y be the length pf the perpendicular to the side;

b be the length of BD;
$m = \frac{1}{2}, n = \frac{1}{5}$.
Then:
$S_{ABD} = \frac{x \cdot h_x}{2} = m \cdot S_{ABC} = m \cdot \frac{xy}{2}$; thus, $h_x = m \cdot y$;
$S_{CBD} = \frac{y \cdot h_y}{2} = n \cdot S_{ABC} = n \cdot \frac{xy}{2}$; thus, $h_y = n \cdot x$.
We have:
$a^2 = (x - h_y)^2 + h_x^2 = (1-n)^2 x^2 + m^2 y^2$,
$c^2 = h_y^2 + (y - h_x)^2 = n^2 x^2 + (1-m)^2 y^2$.
By that we got (because $m^2n^2 - (1-m)^2(1-n)^2 \neq 0$): $x^2 = \frac{m^2c^2-(1-m)^2a^2}{m^2n^2-(1-m)^2(1-n)^2}$,
$y^2 = \frac{n^2a^2-(1-n)^2c^2}{m^2n^2-(1-m)^2(1-n)^2}$.
So, $b^2 = h_x^2 + h_y^2 = m^2y^2 + n^2x^2 = m^2 \frac{n^2a^2-(1-n)^2c^2}{m^2n^2-(1-m)^2(1-n)^2} + n^2 \frac{m^2c^2-(1-m)^2a^2}{m^2n^2-(1-m)^2(1-n)^2}$. Finally we find $b^2 = m^2 \frac{n^2a^2-(1-n)^2c^2}{m^2n^2-(1-m)^2(1-n)^2} + n^2 \frac{m^2c^2-(1-m)^2a^2}{m^2n^2-(1-m)^2(1-n)^2}$.

Answer: 63

Task 10. В ряд записаны 1234 целых числа. За один шаг первый игрок указывает на несколько из них, записанных подряд, а второй игрок либо увеличивает каждое из указанных чисел на 1, либо уменьшает каждое из них на 1. Найдите наибольшее k, такое, для которого первый всегда за несколько шагов сможет добиться, чтобы хотя бы k чисел стали делиться на 3.

There is a row of 1234 integers. In one step, the first player points to several of them written one-by-another, and the second player for each of the numbers increases it by 1 or decreases it by 1. Find the largest k, such that the first player can always make at least k numbers be divisible by 3.

Solution (RUS). Докажем, что $k = 1233$. Будем вести доказательство по индукции по количеству n целых чисел в ряду. При $n = 2$ утверждение $k = n - 1$ очевидно. Для произвольного $n > 2$ рассмотрим два числа, которые стоят по краям отрезка. Если одно из них делится на 3, то будем рассматривать отрезок без этого числа и применим предположение индукции. В противном случае либо у этих чисел разные ненулевые остатки по модулю 3, либо одинаковые. Если остатки одинаковые, то попросим поменять одно из этих чисел. Тогда оно либо станет делиться на 3, либо будет иметь другой ненулевой остаток, что сводит нашу задач к случаю разных остатков на концах отрезка. Но тогда, попросив поменять числа во всем отрезке, мы получим, что одно из чисел на конце отрезка станет делиться на 3.

Solution (ENG). Lets prove that $k = 1233$. We will carry out the proof by induction on the number n of integers in the row. For $n = 2$ it is obvious that $k = n - 1$. For an arbitrary $n > 2$ consider two numbers that stand along the edges of the segment. If one of them is divisible by 3, then we will consider a segment without this number and apply the induction hypothesis. Otherwise, either these numbers have different non-zero remainders mod 3 or the same. If the remainders are the same, then ask to change one of these numbers. Then it will either become divisible by 3 or it will have a different nonzero remainder, which reduces our problem to the case of different remainders at the ends of the segment. But then, asking to change the numbers in the entire segment, we get that one of the numbers at the end of the segment will be divisible by 3.

Answer: 1233

Task 11. Дан 11-угольник $A_1A_2 \ldots A_{11}$ и последовательность точек $X_0, X_1, X_2, \ldots$ на сторонах этого многоугольника, такая, что точка X_0 лежит на стороне A_1A_{11} и для любого целого $k \geq 0$ точка X_{11k+1} – на стороне A_1A_2, точка X_{11k+2} – на стороне A_2A_3, $\ldots$, точка $X_{11(k+1)}$ – на стороне $A_{11}A_1$, причем $A_1X_{11k} = A_1X_{11k+1}, A_2X_{11k+1} = A_2X_{11k+2}, A_3X_{11k+2} = A_3X_{11k+3}, \ldots, A_{11}X_{11k+10} = A_{11}X_{11(k+1)}$. Докажите, что последовательность точек $X_0, X_1, X_2, \ldots$ состоит из конечного множества точек. Укажите верхнюю границу для числа n различных точек в этой последовательности и покажите, что эта граница достижима (то есть существует такой многоугольник $A_1A_2 \ldots A_{11}$ и последовательность точек $X_0, X_1, X_2, \ldots$, построенная по описанным правилам, в которой ровно n различных точек).

There is a sequence of points $X_0, X_1, X_2, \ldots$ on sides of a polygon $A_1A_2 \ldots A_{11}$ such that X_0 lies on A_1A_{11} and for any non-negative integer k point X_{11k+1} lies on A_1A_2, point X_{11k+2} lies on A_2A_3, $\ldots$, and point $X_{11(k+1)}$ lies on $A_{11}A_1$. It is gives that $A_1X_{11k} = A_1X_{11k+1}, A_2X_{11k+1} = A_2X_{11k+2}, A_3X_{11k+2} = A_3X_{11k+3}, \ldots, A_{11}X_{11k+10} = A_{11}X_{11(k+1)}$ for any integer $k \geq 0$. Prove that the sequence $X_0, X_1, X_2, \ldots$ contains a finite number of points. What number is it? Show that the number is achievable on some polygon with 11 sides.

Solution (RUS). Решим задачу для произвольного $(2m+1)$-угольника. Здесь m – заданное натуральное число (в данной задаче оно равно 5). Пусть длина стороны A_kA_{k+1} (для $1 \leq k \leq 2m$) равна a_k, длина стороны $A_{2m+1}A_1$ равна a_{2m+1}, а x – длина A_1X_0.
Тогда

$$|A_2X_1| = (a_1 - x),$$
$$|A_3X_2| = (a_2 - (a_1 - x)) = (a_2 - a_1 + x),$$
$$|A_4X_3| = (a_3 - (a_2 - a_1 + x)) = (a_3 - a_2 + a_1 - x),$$
$$\ldots$$
$$|A_{2k+1}X_{2k}| = (\Sigma_{i=1}^{i=k} a_{2i} - \Sigma_{i=1}^{i=k} a_{2i-1} + x),$$
$$|A_{2(k+1)}X_{2k+1}| = (\Sigma_{i=1}^{i=k} a_{2i+1} - \Sigma_{i=1}^{i=k} a_{2i} - x),$$
$$\ldots$$
$$|A_{2m+1}X_{2m}| = (\Sigma_{i=1}^{i=m} a_{2i} - \Sigma_{i=1}^{i=m} a_{2i-1} + x),$$
$$|A_0X_{2m+1}| = (\Sigma_{i=1}^{i=m} a_{2i+1} - \Sigma_{i=1}^{i=m} a_{2i} - x).$$

для $1 \leq k \leq m$. Если точка X_{2m+1} совпадает с X_0, тогда все точки, начиная с этого места, будут повторяться. Если точки X_{2m+1} и X_0 не совпадают, то процесс совпадения точек начинается не с X_0, а с X_{2m+1} и с расстояния не x, а $(\Sigma_{i=1}^{i=m} a_{2i+1} - \Sigma_{i=1}^{i=m} a_{2i} - x)$. Поэтому после второго прохода того же цикла для точки $X_{2(2m+1)}$ имеем $|A_0X_{2(2m+1)}| = (\Sigma_{i=1}^{i=m} a_{2i+1} - \Sigma_{i=1}^{i=m} a_{2i} - |A_0X_{2m+1}|) = (\Sigma_{i=1}^{i=m} a_{2i+1} - \Sigma_{i=1}^{i=m} a_{2i} - (\Sigma_{i=1}^{i=m} a_{2i+1} - \Sigma_{i=1}^{i=m} a_{2i} - x)) = x$, то есть точка $X_{2(2m+1)}$ совпадает с X_0 и в последовательности $X_0, X_1, X_2, \ldots$ – не более $2(2m+1)$ различных точек.
Для реализации сценария с этим количеством точек используем правильный $(2m+1)$-угольник со стороной, равной $3x$.

Solution (ENG). Let's solve the task for arbitrary polygon with $2m+1$ sides for some positive integer m (for that particular tasks we have $m = 5$). Let length of any side A_kA_{k+1} (for $1 \leq k \leq 2m$) be equal to a_k with length of $A_{2m+1}A_1$ being equal to a_{2m+1} and x being the length of A_1X_0.
Then we have

$$|A_2X_1| = (a_1 - x),$$
$$|A_3X_2| = (a_2 - (a_1 - x)) = (a_2 - a_1 + x),$$
$$|A_4X_3| = (a_3 - (a_2 - a_1 + x)) = (a_3 - a_2 + a_1 - x),$$

$$\dots$$

$$|A_{2k+1}X_{2k}| = (\Sigma_{i=1}^{i=k} a_{2i} - \Sigma_{i=1}^{i=k} a_{2i-1} + x),$$

$$|A_{2(k+1)}X_{2k+1}| = (\Sigma_{i=1}^{i=k} a_{2i+1} - \Sigma_{i=1}^{i=k} a_{2i} - x),$$

$$\dots$$

$$|A_{2m+1}X_{2m}| = (\Sigma_{i=1}^{i=m} a_{2i} - \Sigma_{i=1}^{i=m} a_{2i-1} + x),$$

$$|A_0X_{2m+1}| = (\Sigma_{i=1}^{i=m} a_{2i+1} - \Sigma_{i=1}^{i=m} a_{2i} - x).$$

for $1 \le k \le m$. If X_{2m+1} coincides with X_0, then all other points on same sides coincide. If X_{2m+1} and X_0 doesn't coincide, then the process of point coinciding starts not with X_0 but with X_{2m+1} with distance $(\Sigma_{i=1}^{i=m} a_{2i+1} - \Sigma_{i=1}^{i=m} a_{2i} - x)$. After the second traversal for the point $X_{2(2m+1)}$ we have $|A_0X_{2(2m+1)}| = (\Sigma_{i=1}^{i=m} a_{2i+1} - \Sigma_{i=1}^{i=m} a_{2i} - |A_0X_{2m+1}|) = (\Sigma_{i=1}^{i=m} a_{2i+1} - \Sigma_{i=1}^{i=m} a_{2i} - (\Sigma_{i=1}^{i=m} a_{2i+1} - \Sigma_{i=1}^{i=m} a_{2i} - x)) = x$, thus the point $X_{2(2m+1)}$ coincides with the point X_0 and in the sequence $X_0, X_1, X_2, \dots$ we have no more than $2(2m+1)$ different points.
Then we construct equilateral polygon of $2m+1$ sides with length of any side being equal to $3x$.

Task 12. Вещественные числа x, y, z удовлетворяют соотношениям $x+y+z = x^2+y^2+z^2 = 2$. Докажите, что среди этих чисел найдутся два, расстояние между которыми не меньше 1.

Real numbers x, y, z satisfy $x+y+z = x^2+y^2+z^2 = 2$. Prove that there are two of the numbers with the distance between them at least 1.

Solution (RUS). Заметим, что $2(xy+yz+zx) = (x+y+z)^2 - (x^2+y^2+z^2) = 2$. Рассмотрим величину $(x-y)^2+(y-z)^2+(z-x)^2$. Она равна $2(x^2+y^2+z^2) - 2(xy+yz+zx) = 2$. Если все разности $a = |x-y|$, $b = |y-z|$ и $c = |z-x|$ меньше 1, то

$$2 = a^2+b^2+c^2 < a+b+c.$$

Но из трех разностей одна равна сумме двух других, например, $a = b+c$. Тогда получаем, что $a > 1$ – противоречие.

Solution (ENG). Note that $2\cdot(xy+yz+zx) = (x+y+z)^2 - (x^2+y^2+z^2) = 2$. Next, $(x-y)^2+(y-z)^2+(z-x)^2 = 2\cdot(x^2+y^2+z^2) - 2\cdot(xy+yz+zx) = 2$. If all distances $a = |x-y|$, $b = |y-z|$ and $c = |z-x|$ are less than 1, then

$$2 = a^2+b^2+c^2 < a+b+c$$

But one of the three distances is equal to sum of two thers, for example (without loss of generality) $a = b+c$. then we get $a > 1$ whice produces a contradiction with our assumption about a, b, c. That contradiction proves initial statement.

10 класс, задача №1 (краткий числовой ответ, 2 балла)
10th degree, task 1 (short answer, 2 points)

1. В полдень часовая и минутная стрелки механических часов с круглым циферблатом совпадают, то есть угол между ними равен 0°. Сколько минут с 12:00 до 13:00 того же дня угол между минутной и часовой стрелкой составит не больше 59° (каждая стрелка движется с

постоянной угловой скоростью, а углом между стрелками считается меньший из двух образуемых ими углов)?

The hour and minute hands of a mechanical watch with a round dial coincide at noon. The angle between them is $0°$ at the time. How many minutes from a time between 12 p.m. and 13 p.m.(of the same day) the hands form an angle less or equal to $59°$ (each hand moves with a constant angular speed, and the angle between the hands is the smaller of the two angles they form)?

16

2. В полдень часовая и минутная стрелки механических часов с круглым циферблатом совпадают, то есть угол между ними равен $0°$. Сколько минут с 12:00 до 13:00 того же дня угол между минутной и часовой стрелкой составит не больше $48°$ (каждая стрелка движется с постоянной угловой скоростью, а углом между стрелками считается меньший из двух образуемых ими углов)?

   The hour and minute hands of a mechanical watch with a round dial coincide at noon. The angle between them is $0°$ at the time. How many minutes from a time between 12 p.m. and 13 p.m.(of the same day) the hands form an angle less or equal to $48°$ (each hand moves with a constant angular speed, and the angle between the hands is the smaller of the two angles they form)?

   12

3. В полдень часовая и минутная стрелки механических часов с круглым циферблатом совпадают, то есть угол между ними равен $0°$. Сколько минут с 12:00 до 13:00 того же дня угол между минутной и часовой стрелкой составит не больше $53.5°$ (каждая стрелка движется с постоянной угловой скоростью, а углом между стрелками считается меньший из двух образуемых ими углов)?

   The hour and minute hands of a mechanical watch with a round dial coincide at noon. The angle between them is $0°$ at the time. How many minutes from a time between 12 p.m. and 13 p.m.(of the same day) the hands form an angle less or equal to $53.5°$ (each hand moves with a constant angular speed, and the angle between the hands is the smaller of the two angles they form)?

   14

4. В полдень часовая и минутная стрелки механических часов с круглым циферблатом совпадают, то есть угол между ними равен $0°$. Сколько минут с 12:00 до 13:00 того же дня угол между минутной и часовой стрелкой составит не больше $75.5°$ (каждая стрелка движется с постоянной угловой скоростью, а углом между стрелками считается меньший из двух образуемых ими углов)?

   The hour and minute hands of a mechanical watch with a round dial coincide at noon. The angle between them is $0°$ at the time. How many minutes from a time between 12 p.m. and 13 p.m.(of the same day) the hands form an angle less or equal to $75.5°$ (each hand moves with a constant angular speed, and the angle between the hands is the smaller of the two angles they form)?

   22

10 класс, задача №2 (краткий числовой ответ, 3 балла)

10th degree, task 2 (short answer, 3 points)

1. Однажды ребенок, которому было не меньше 7 и не больше 12 лет, написал уравнение:

$$y \cdot x^2 + k \cdot x + y + k = 0,$$

в котором вместо y стоял год его рождения (целое неотрицательное число), вместо k – его возраст на тот момент (натуральное число), а $y + k$ – год, в который было написано это уравнение, которое, как оказалось, имеет вещественные корни. В каком году мог родиться этот ребенок? В ответ запишите сумму возможных значений y.

Once upon a time, a child who was no less than 7 and no more than 12 years old wrote the equation:

$$y \cdot x^2 + k \cdot x + y + k = 0,$$

in which instead of y there was the year of his birth (non-negative integer), instead of k there was his age at that time (a positive integer), and $y + k$ was the year this equation was written in. It turned out that the equation has real roots. What year could this child be born in? Write down the sum of all possible values of y.

3

2. Однажды девушка, которой было не меньше 16 и не больше 22 лет, написала уравнение:

$$y \cdot x^2 + k \cdot x + y + k = 0,$$

в котором вместо y стоял год ее рождения (целое неотрицательное число), вместо k – ее возраст на тот момент (натуральное число), а $y + k$ – год, в который было написано это уравнение, которое, как оказалось, имеет вещественные корни. В каком году могла родиться эта девушка? В ответ запишите сумму возможных значений y.

Once upon a time, a girl who was no less than 16 and no more than 22 years old wrote the equation:

$$y \cdot x^2 + k \cdot x + y + k = 0,$$

in which instead of y there was the year of her birth (non-negative integer), instead of k there was her age at that time (a positive integer), and $y + k$ was the year this equation was written in. It turned out that the equation has real roots. What year could this girl be born in? Write down the sum of all possible values of y.

10

3. Однажды ребенок, которому было не меньше 10 и не больше 16 лет, написал уравнение:

$$y \cdot x^2 + k \cdot x + y + k = 0,$$

в котором вместо y стоял год его рождения (целое неотрицательное число), вместо k – его возраст на тот момент (натуральное число), а $y + k$ – год, в который было написано это уравнение, которое, как оказалось, имеет вещественные корни. В каком году мог родиться этот ребенок? В ответ запишите сумму возможных значений y.

Once upon a time, a child who was no less than 10 and no more than 16 years old wrote the equation:

$$y \cdot x^2 + k \cdot x + y + k = 0,$$

in which instead of y there was the year of his birth (non-negative integer), instead of k there was his age at that time (a positive integer), and $y + k$ was the year this equation was written in. It turned out that the equation has real roots. What year could this child be born in? Write down the sum of all possible values of y.

6

4. Однажды мужчина, которому было не меньше 43 и не больше 49 лет, написал уравнение:

$$y \cdot x^2 + k \cdot x + y + k = 0,$$

в котором вместо y стоял год его рождения (целое неотрицательное число), вместо k – его возраст на тот момент (натуральное число), а $y + k$ – год, в который было написано это уравнение, которое, как оказалось, имеет вещественные корни. В каком году мог родиться этот мужчина? В ответ запишите сумму возможных значений y.

Once upon a time, a man who was no less than 43 and no more than 49 years old wrote the equation:

$$y \cdot x^2 + k \cdot x + y + k = 0,$$

in which instead of y there was the year of his birth (non-negative integer), instead of k there was his age at that time (a positive integer), and $y + k$ was the year this equation was written in. It turned out that the equation has real roots. What year could this man be born in? Write down the sum of all possible values of y.

55

10 класс, задача №3 (краткий числовой ответ, 4 балла)
10th degree, task 3 (short answer, 4 points)

1. Дан выпуклый четырехугольник $ABCD$, длина стороны AB равна 8, диагонали AC – 5, $\angle CAD = 15°, \angle CBA = 30°, \angle ACD = 45°$. Пусть PQ – срединный перпендикуляр к стороне AB (с основанием в точке P), QD – биссектриса $\angle ADC$. Найдите расстояние PQ.

   There is a polygon $ABCD$ with $AB = 8, AC = 5, \angle CAD = 15°, \angle CBA = 30°, \angle ACD = 45°$. Let $PQ \perp AB$ with P as a center of AB segment, and QD is a bisector of $\angle ADC$. Find the length of PQ.

   3

2. Дан выпуклый четырехугольник $ABCD$, длина стороны AB равна 14, диагонали AC – 25, $\angle CAD = 15°, \angle CBA = 30°, \angle ACD = 45°$. Пусть PQ – срединный перпендикуляр к стороне AB (с основанием в точке P), QD – биссектриса $\angle ADC$. Найдите расстояние PQ.

   There is a polygon $ABCD$ with $AB = 14, AC = 25, \angle CAD = 15°, \angle CBA = 30°, \angle ACD = 45°$. Let $PQ \perp AB$ with P as a center of AB segment, and QD is a bisector of $\angle ADC$. Find the length of PQ.

   24

3. Дан выпуклый четырехугольник $ABCD$, длина стороны AB равна 6, диагонали AC – 5, $\angle CAD = 15°, \angle CBA = 30°, \angle ACD = 45°$. Пусть PQ – срединный перпендикуляр к стороне AB (с основанием в точке P), QD – биссектриса $\angle ADC$. Найдите расстояние PQ.

   There is a polygon $ABCD$ with $AB = 6, AC = 5, \angle CAD = 15°, \angle CBA = 30°, \angle ACD = 45°$. Let $PQ \perp AB$ with P as a center of AB segment, and QD is a bisector of $\angle ADC$. Find the length of

PQ.

4

4. Дан выпуклый четырехугольник $ABCD$, длина стороны AB равна 10, диагонали AC – 13, $\angle CAD = 15°, \angle CBA = 30°, \angle ACD = 45°$. Пусть PQ – срединный перпендикуляр к стороне AB (с основанием в точке P), QD – биссектриса $\angle ADC$. Найдите расстояние PQ.

   There is a polygon $ABCD$ with $AB = 10, AC = 13, \angle CAD = 15°, \angle CBA = 30°, \angle ACD = 45°$. Let $PQ \perp AB$ with P as a center of AB segment, and QD is a bisector of $\angle ADC$. Find the length of PQ.

   12

10 класс, задача №4 (краткий числовой ответ, 4 балла)
10th degree, task 4 (short answer, 4 points)

1. В ряд записаны 1200 целых чисел. За один шаг первый игрок указывает на несколько из них, записанных подряд, а второй игрок либо увеличивает каждое из указанных чисел на 1, либо уменьшает каждое из них на 1. Найдите наибольшее k, такое, для которого первый всегда за несколько шагов сможет добиться, чтобы хотя бы k чисел стали делиться на 3.

   There is a row of 1200 integers. In one step, the first player points to several of them written one-by-another, and the second player for each of the numbers increases it by 1 or decreases it by 1. Find the largest k, such that the first player can always make at least k numbers be divisible by 3.

   1199

2. В ряд записаны 1500 целых чисел. За один шаг первый игрок указывает на несколько из них, записанных подряд, а второй игрок либо увеличивает каждое из указанных чисел на 1, либо уменьшает каждое из них на 1. Найдите наибольшее k, такое, для которого первый всегда за несколько шагов сможет добиться, чтобы хотя бы k чисел стали делиться на 3.

   There is a row of 1500 integers. In one step, the first player points to several of them written one-by-another, and the second player for each of the numbers increases it by 1 or decreases it by 1. Find the largest k, such that the first player can always make at least k numbers be divisible by 3.

   1499

3. В ряд записаны 1800 целых чисел. За один шаг первый игрок указывает на несколько из них, записанных подряд, а второй игрок либо увеличивает каждое из указанных чисел на 1, либо уменьшает каждое из них на 1. Найдите наибольшее k, такое, для которого первый всегда за несколько шагов сможет добиться, чтобы хотя бы k чисел стали делиться на 3.

   There is a row of 1800 integers. In one step, the first player points to several of them written one-by-another, and the second player for each of the numbers increases it by 1 or decreases it by 1. Find the largest k, such that the first player can always make at least k numbers be divisible by 3.

   1799

4. В ряд записаны 1350 целых чисел. За один шаг первый игрок указывает на несколько из них, записанных подряд, а второй игрок либо увеличивает каждое из указанных чисел на 1, либо уменьшает каждое из них на 1. Найдите наибольшее k, такое, для которого первый

всегда за несколько шагов сможет добиться, чтобы хотя бы k чисел стали делиться на 3.

There is a row of 1350 integers. In one step, the first player points to several of them written one-by-another, and the second player for each of the numbers increases it by 1 or decreases it by 1. Find the largest k, such that the first player can always make at least k numbers be divisible by 3.

1349

10 класс, задача №5 (развернутое решение, 5 баллов)
10th degree, task 5 (detailed answer, 5 points)

1. Дан 57-угольник $A_1A_2 \ldots A_{57}$ и последовательность точек $X_0, X_1, X_2, \ldots$ на сторонах этого многоугольника, такая, что точка X_0 лежит на стороне A_1A_{57} и для любого целого $k \geq 0$ точка X_{57k+1} – на стороне A_1A_2, точка X_{57k+2} – на стороне A_2A_3, $\ldots$, точка $X_{57(k+1)}$ – на стороне $A_{57}A_1$, причем $A_1X_{57k} = A_1X_{57k+1}, A_2X_{57k+1} = A_2X_{57k+2}, A_3X_{57k+2} = A_3X_{57k+3}, \ldots, A_{57}X_{57k+56} = A_{57}X_{57(k+1)}$. Докажите, что последовательность точек $X_0, X_1, X_2, \ldots$ состоит из конечного множества точек. Укажите верхнюю границу для числа n различных точек в этой последовательности и покажите, что эта граница достижима (то есть существует такой многоугольник $A_1A_2 \ldots A_{57}$ и последовательность точек $X_0, X_1, X_2, \ldots$, построенная по описанным правилам, в которой ровно n различных точек).

   There is a sequence of points $X_0, X_1, X_2, \ldots$ on sides of a polygon $A_1A_2 \ldots A_{57}$ such that X_0 lies on A_1A_{57} and for any non-negative integer k point X_{57k+1} lies on A_1A_2, point X_{57k+2} lies on A_2A_3, $\ldots$, and point $X_{57(k+1)}$ lies on $A_{57}A_1$. It is gives that $A_1X_{57k} = A_1X_{57k+1}, A_2X_{57k+1} = A_2X_{57k+2}, A_3X_{57k+2} = A_3X_{57k+3}, \ldots, A_{57}X_{57k+56} = A_{57}X_{57(k+1)}$ for any integer $k \geq 0$. Prove that the sequence $X_0, X_1, X_2, \ldots$ contains a finite number of points. What number is it? Show that the number is achievable on some polygon with 57 sides.

2. Дан 51-угольник $A_1A_2 \ldots A_{51}$ и последовательность точек $X_0, X_1, X_2, \ldots$ на сторонах этого многоугольника, такая, что точка X_0 лежит на стороне A_1A_{51} и для любого целого $k \geq 0$ точка X_{51k+1} – на стороне A_1A_2, точка X_{51k+2} – на стороне A_2A_3, $\ldots$, точка $X_{51(k+1)}$ – на стороне $A_{51}A_1$, причем $A_1X_{51k} = A_1X_{51k+1}, A_2X_{51k+1} = A_2X_{51k+2}, A_3X_{51k+2} = A_3X_{51k+3}, \ldots, A_{51}X_{51k+50} = A_{51}X_{51(k+1)}$. Докажите, что последовательность точек $X_0, X_1, X_2, \ldots$ состоит из конечного множества точек. Укажите верхнюю границу для числа n различных точек в этой последовательности и покажите, что эта граница достижима (то есть существует такой многоугольник $A_1A_2 \ldots A_{51}$ и последовательность точек $X_0, X_1, X_2, \ldots$, построенная по описанным правилам, в которой ровно n различных точек).

   There is a sequence of points $X_0, X_1, X_2, \ldots$ on sides of a polygon $A_1A_2 \ldots A_{51}$ such that X_0 lies on A_1A_{51} and for any non-negative integer k point X_{51k+1} lies on A_1A_2, point X_{51k+2} lies on A_2A_3, $\ldots$, and point $X_{51(k+1)}$ lies on $A_{51}A_1$. It is gives that $A_1X_{51k} = A_1X_{51k+1}, A_2X_{51k+1} = A_2X_{51k+2}, A_3X_{51k+2} = A_3X_{51k+3}, \ldots, A_{51}X_{51k+50} = A_{51}X_{51(k+1)}$ for any integer $k \geq 0$. Prove that the sequence $X_0, X_1, X_2, \ldots$ contains a finite number of points. What number is it? Show that the number is achievable on some polygon with 51 sides.

3. Дан 49-угольник $A_1A_2 \ldots A_{49}$ и последовательность точек $X_0, X_1, X_2, \ldots$ на сторонах этого многоугольника, такая, что точка X_0 лежит на стороне A_1A_{49} и для любого целого $k \geq 0$ точка X_{49k+1} – на стороне A_1A_2, точка X_{49k+2} – на стороне A_2A_3, $\ldots$, точка $X_{49(k+1)}$ – на стороне $A_{49}A_1$, причем $A_1X_{49k} = A_1X_{49k+1}, A_2X_{49k+1} = A_2X_{49k+2}, A_3X_{49k+2} = A_3X_{49k+3}, \ldots,$

$A_{49}X_{49k+48} = A_{49}X_{49(k+1)}$. Докажите, что последовательность точек $X_0, X_1, X_2, \ldots$ состоит из конечного множества точек. Укажите верхнюю границу для числа n различных точек в этой последовательности и покажите, что эта граница достижима (то есть существует такой многоугольник $A_1A_2 \ldots A_{49}$ и последовательность точек $X_0, X_1, X_2, \ldots$, построенная по описанным правилам, в которой ровно n различных точек).

There is a sequence of points $X_0, X_1, X_2, \ldots$ on sides of a polygon $A_1A_2 \ldots A_{49}$ such that X_0 lies on A_1A_{49} and for any non-negative integer k point X_{49k+1} lies on A_1A_2, point X_{49k+2} lies on A_2A_3, ..., and point $X_{49(k+1)}$ lies on $A_{49}A_1$. It is gives that $A_1X_{49k} = A_1X_{49k+1}, A_2X_{49k+1} = A_2X_{49k+2}, A_3X_{49k+2} = A_3X_{49k+3}, \ldots, A_{49}X_{49k+48} = A_{49}X_{49(k+1)}$ for any integer $k \geq 0$. Prove that the sequence $X_0, X_1, X_2, \ldots$ contains a finite number of points. What number is it? Show that the number is achievable on some polygon with 49 sides.

4. Дан 61-угольник $A_1A_2 \ldots A_{61}$ и последовательность точек $X_0, X_1, X_2, \ldots$ на сторонах этого многоугольника, такая, что точка X_0 лежит на стороне A_1A_{61} и для любого целого $k \geq 0$ точка X_{61k+1} – на стороне A_1A_2, точка X_{61k+2} – на стороне A_2A_3, ..., точка $X_{61(k+1)}$ – на стороне $A_{61}A_1$, причем $A_1X_{61k} = A_1X_{61k+1}, A_2X_{61k+1} = A_2X_{61k+2}, A_3X_{61k+2} = A_3X_{61k+3}, \ldots, A_{61}X_{61k+60} = A_{61}X_{61(k+1)}$. Докажите, что последовательность точек $X_0, X_1, X_2, \ldots$ состоит из конечного множества точек. Укажите верхнюю границу для числа n различных точек в этой последовательности и покажите, что эта граница достижима (то есть существует такой многоугольник $A_1A_2 \ldots A_{61}$ и последовательность точек $X_0, X_1, X_2, \ldots$, построенная по описанным правилам, в которой ровно n различных точек).

There is a sequence of points $X_0, X_1, X_2, \ldots$ on sides of a polygon $A_1A_2 \ldots A_{61}$ such that X_0 lies on A_1A_{61} and for any non-negative integer k point X_{61k+1} lies on A_1A_2, point X_{61k+2} lies on A_2A_3, ..., and point $X_{61(k+1)}$ lies on $A_{61}A_1$. It is gives that $A_1X_{61k} = A_1X_{61k+1}, A_2X_{61k+1} = A_2X_{61k+2}, A_3X_{61k+2} = A_3X_{61k+3}, \ldots, A_{61}X_{61k+60} = A_{61}X_{61(k+1)}$ for any integer $k \geq 0$. Prove that the sequence $X_0, X_1, X_2, \ldots$ contains a finite number of points. What number is it? Show that the number is achievable on some polygon with 61 sides.

10 класс, задача №6 (развернутое решение, 8 баллов)
10th degree, task 6 (detailed answer, 8 points)

1. Последовательность $x_1, x_2, \ldots$ задана следующим рекуррентным образом: $x_0 = 1$ и $x_{n+1} = (\frac{16}{x_n})^{1/4}$ для любого целого неотрицательного n. Докажите, что найдется n_0, такое, что $x_n \leq 2$ для всех $n \geq n_0$.

   Infinite sequence $x_1, x_2, \ldots$ is constructed as follows: $x_0 = 1, x_{n+1} = (\frac{16}{x_n})^{1/4}$ for every non-negative integer n. Prove that there is a number n_0 such that $x_n \leq 2$ for every $n \geq n_0$.

2. Последовательность $x_1, x_2, \ldots$ задана следующим рекуррентным образом: $x_0 = 1$ и $x_{n+1} = (\frac{125}{x_n})^{1/3}$ для любого целого неотрицательного n. Докажите, что найдется n_0, такое, что $x_n \leq 5$ для всех $n \geq n_0$.

   Infinite sequence $x_1, x_2, \ldots$ is constructed as follows: $x_0 = 1, x_{n+1} = (\frac{125}{x_n})^{1/3}$ for every non-negative integer n. Prove that there is a number n_0 such that $x_n \leq 5$ for every $n \geq n_0$.

3. Последовательность x_1, x_2,... задана следующим рекуррентным образом: $x_0 = 1$ и $x_{n+1} = (\frac{216}{x_n})^{1/3}$ для любого целого неотрицательного n. Докажите, что найдется n_0, такое, что $x_n \leq 6$ для всех $n \geq n_0$.

   Infinite sequence x_1, x_2,... is constructed as follows: $x_0 = 1, x_{n+1} = (\frac{216}{x_n})^{1/3}$ for every non-negative integer n. Prove that there is a number n_0 such that $x_n \leq 6$ for every $n \geq n_0$.

4. Последовательность x_1, x_2,... задана следующим рекуррентным образом: $x_0 = 1$ и $x_{n+1} = (\frac{81}{x_n})^{1/4}$ для любого целого неотрицательного n. Докажите, что найдется n_0, такое, что $x_n \leq 3$ для всех $n \geq n_0$.

   Infinite sequence x_1, x_2,... is constructed as follows: $x_0 = 1, x_{n+1} = (\frac{81}{x_n})^{1/4}$ for every non-negative integer n. Prove that there is a number n_0 such that $x_n \leq 3$ for every $n \geq n_0$.

10 класс. Разбор задач
10th degree. Solution of tasks

Task 1. В полдень часовая и минутная стрелки механических часов с круглым циферблатом совпадают, то есть угол между ними равен 0°. Сколько минут с 12:00 до 13:00 того же дня угол между минутной и часовой стрелкой составит не больше 59° (каждая стрелка движется с постоянной угловой скоростью, а углом между стрелками считается меньший из двух образуемых ими углов)?

The hour and minute hands of a mechanical watch with a round dial coincide at noon. The angle between them is 0° at the time. How many minutes from a time between 12 p.m. and 13 p.m.(of the same day) the hands form an angle less or equal to 59° (each hand moves with a constant angular speed, and the angle between the hands is the smaller of the two angles they form)?

Solution (RUS). Угловая скорость вращения минутной стрелки равна 6°/мин, часовой – 0.5°/мин. Запишем уравнения движения стрелок после 12:00:

$$\alpha_m(t) = 6 \cdot t$$

$$\alpha_h(t) = 0.5 \cdot t$$

Пусть угол между стрелками не превышает $\phi < 180°$. Тогда либо $5.5t \leq \phi$ (отсюда $0 \leq t \leq \frac{\phi}{5.5}$), либо $360° - 5.5t \leq \phi$ (отсюда $\frac{360°-\phi}{5.5} \leq t \leq 60$). Сложим длительности этих отрезков времени и получим $\frac{2\cdot\phi-30°}{5.5}$. Осталось вычислить значение этого выражения для $\phi = 59°$.

Solution (ENG). The angular rotation speed of the minute hand is 6°/min, the hour hand's is 0.5°/min. Let's write down the equations of motion of the arrows after 12 p.m.:

$$\alpha_m(t) = 6 \cdot t$$

$$\alpha_h(t) = 0.5 \cdot t$$

Let the angle between the arrows does not exceed $\phi < 180°$. Then either $5.5t \leq \phi$ (hence $0 \leq t \leq \frac{\phi}{5.5}$) or $360° - 5.5t \leq \phi$ (hence $\frac{360°-\phi}{5.5} \leq t \leq 60$). Let's add up the durations of these time intervals and get

$\frac{2\cdot\phi-30°}{5.5}$. It remains to calculate the value of this expression for $\phi = 59°$.

Answer: 16

Task 2. Однажды ребенок, которому было не меньше 7 и не больше 12 лет, написал уравнение:

$$y \cdot x^2 + k \cdot x + y + k = 0,$$

в котором вместо y стоял год его рождения (целое неотрицательное число), вместо k – его возраст на тот момент (натуральное число), а $y + k$ – год, в который было написано это уравнение, которое, как оказалось, имеет вещественные корни. В каком году мог родиться этот ребенок? В ответ запишите сумму возможных значений y.

Once upon a time, a child who was no less than 7 and no more than 12 years old wrote the equation:

$$y \cdot x^2 + k \cdot x + y + k = 0,$$

in which instead of y there was the year of his birth (non-negative integer), instead of k there was his age at that time (a positive integer), and $y + k$ was the year this equation was written in. It turned out that the equation has real roots. What year could this child be born in? Write down the sum of all possible values of y.

Solution (RUS). Уравнение $y \cdot x^2 + k \cdot x + (y + k) = 0$ имеет действительные корни тогда и только тогда, когда $D = k^2 - 4y(y+k) = -4y^2 - 4ky + k^2 \geq 0$, то есть, когда выполнятся неравенство $4y^2 + 4ky - k^2 \leq 0$.
Это неравенство выполнено тогда и только тогда, когда значение y лежит между корнями уравнения $4y^2 + 4ky - k^2 = 0$, то есть когда $\frac{-1-\sqrt{2}}{2} \cdot k \leq y \leq \frac{-1+\sqrt{2}}{2} \cdot k$.
Кроме того, нам нужно найти только неотрицательные значения y. Поэтому $0 \leq y \leq \frac{-1+\sqrt{2}}{2} \cdot k$. Так как $\sqrt{2} < 1.42$ и $k \leq 12$, возможные значения y – это 0, 1 или 2.

Solution (ENG). The equation $y \cdot x^2 + k \cdot x + (y + k) = 0$ has real roots only when $D = k^2 - 4y(y + k) = -4y^2 - 4ky + k^2 \geq 0$, i.e. $4y^2 + 4ky - k^2 \leq 0$.
The inequality is satisfied when y lies between roots of the equation $4y^2 + 4ky - k^2 = 0$, thus $\frac{-1-\sqrt{2}}{2} \cdot k \leq y \leq \frac{-1+\sqrt{2}}{2} \cdot k$.
Let's don't forget about $y \geq 0$. So, $0 \leq y \leq \frac{-1+\sqrt{2}}{2} \cdot k$. Because of $\sqrt{2} < 1.42$ and $k \leq 12$ we got that y can be equal only to 0, 1 or 2.

Answer: 3

Task 3. Дан выпуклый четырехугольник $ABCD$, длина стороны AB равна 8, диагонали AC – 5, $\angle CAD = 15°, \angle CBA = 30°, \angle ACD = 45°$. Пусть PQ – срединный перпендикуляр к стороне AB (с основанием в точке P), QD – биссектриса $\angle ADC$. Найдите расстояние PQ.

There is a polygon $ABCD$ with $AB = 8, AC = 5, \angle CAD = 15°, \angle CBA = 30°, \angle ACD = 45°$. Let $PQ \perp AB$ with P as a center of AB segment, and QD is a bisector of $\angle ADC$. Find the length of PQ.

Solution (RUS). Сначала докажем, что точка Q – это центр R окружности, описанной вокруг $\triangle ABC$. Имеем:
$\angle ARC = 60°$ как центральный угол, соответствующий вписанному углу $\angle ABC = 30°$; из рассмотрения $\triangle ACD$ следует $\angle ADC = 120°$.
Так как сумма противолежащих углов $\angle ARC + \angle ADC = 180°$, то вокруг четырехугольника $ARCD$ можно описать окружность. Так как в этой окружности хорды AR и CR имеют равную длину, равную радиусу окружности, описанной вокруг $\triangle ABC$, то равны и стягиваемые ими дуги, то есть $\angle ADR = \angle CDR$, DR – биссектриса угла ADC, а точка Q – это центр R окружности, описанной вокруг треугольника ABC.
Пусть r – радиус окружности, описанной около треугольника ABC. Имеем: $\frac{AC}{2} = r \cdot \sin(30°)$, то есть $r = AC$. Отсюда $PQ = \sqrt{AC^2 - (\frac{AB}{2})^2}$.

Solution (ENG). Lets prove that Q coincides with the center R of a circle which $\triangle ABC$ is inscribed in. We got:
$\angle ARC = 60°$ because it corresponds to $\angle ABC = 30°$ which is inscribed in the circle; from $\triangle ACD$ we have $\angle ADC = 120°$.
$\angle ARC + \angle ADC = 180°$ as an opposite inscribed angles in a circle, thus we can inscribe $ARCD$ in a circle. Chords AR and CR are equal to the radius of the circle which $\triangle ABC$ is inscribed in, thus $\angle ADR = \angle CDR$, DR is a bisector of $\angle ADC$, so point Q coincides with R which is a center of the circle which $\triangle ABC$ is inscribed in.
Let r be length of the radius of the circle. We have $\frac{AC}{2} = r \cdot \sin(30°)$, so $r = AC$. Thus $PQ = \sqrt{AC^2 - (\frac{AB}{2})^2}$.

Answer: 3

Task 4. В ряд записаны 1200 целых чисел. За один шаг первый игрок указывает на несколько из них, записанных подряд, а второй игрок либо увеличивает каждое из указанных чисел на 1, либо уменьшает каждое из них на 1. Найдите наибольшее k, такое, для которого первый всегда за несколько шагов сможет добиться, чтобы хотя бы k чисел стали делиться на 3.

There is a row of 1200 integers. In one step, the first player points to several of them written one-by-another, and the second player for each of the numbers increases it by 1 or decreases it by 1. Find the largest k, such that the first player can always make at least k numbers be divisible by 3.

Solution (RUS). См. решение задачи №4 для 7-9 классов.

Solution (ENG). See solution of task 4 (7-9 degree).

Answer: 1199

Task 5. Дан 57-угольник $A_1A_2 \ldots A_{57}$ и последовательность точек $X_0, X_1, X_2, \ldots$ на сторонах этого многоугольника, такая, что точка X_0 лежит на стороне A_1A_{57} и для любого целого $k \geq 0$ точка X_{57k+1} – на стороне A_1A_2, точка X_{57k+2} – на стороне A_2A_3, …, точка $X_{57(k+1)}$ – на стороне $A_{57}A_1$, причем $A_1X_{57k} = A_1X_{57k+1}, A_2X_{57k+1} = A_2X_{57k+2}, A_3X_{57k+2} = A_3X_{57k+3}, \ldots, A_{57}X_{57k+56} = A_{57}X_{57(k+1)}$. Докажите, что последовательность точек $X_0, X_1, X_2, \ldots$ состоит из конечного множества точек. Укажите верхнюю границу для числа n различных точек в этой последовательности и покажите, что эта граница достижима (то есть существует такой многоугольник $A_1A_2\dots A_{57}$ и последовательность точек $X_0, X_1, X_2, \dots$, построенная по описанным правилам, в которой ровно n различных точек).

There is a sequence of points $X_0, X_1, X_2, \dots$ on sides of a polygon $A_1A_2\dots A_{57}$ such that X_0 lies on A_1A_{57} and for any non-negative integer k point X_{57k+1} lies on A_1A_2, point X_{57k+2} lies on A_2A_3, …, and point $X_{57(k+1)}$ lies on $A_{57}A_1$. It is gives that $A_1X_{57k} = A_1X_{57k+1}, A_2X_{57k+1} = A_2X_{57k+2}, A_3X_{57k+2} = A_3X_{57k+3}, \dots, A_{57}X_{57k+56} = A_{57}X_{57(k+1)}$ for any integer $k \geq 0$. Prove that the sequence $X_0, X_1, X_2, \dots$ contains a finite number of points. What number is it? Show that the number is achievable on some polygon with 57 sides.

Solution (RUS). См. решение задачи №5 для 7-9 классов.

Solution (ENG). See solution of task 5 (7-9 degree) for $m = 28$.

Task 6. Последовательность $x_1, x_2, \dots$ задана следующим рекуррентным образом: $x_0 = 1$ и $x_{n+1} = (\frac{16}{x_n})^{1/4}$ для любого целого неотрицательного n. Докажите, что найдется n_0, такое, что $x_n \leq 2$ для всех $n \geq n_0$.

Infinite sequence $x_1, x_2, \dots$ is constructed as follows: $x_0 = 1, x_{n+1} = (\frac{16}{x_n})^{1/4}$ for every non-negative integer n. Prove that there is a number n_0 such that $x_n \leq 2$ for every $n \geq n_0$.

Solution (RUS). Докажем индукцией по $n \geq 0$, что последовательность, описанная в условии задачи, совпадает с последовательностью, задданной формулой общего члена $y_n = 16^{\frac{1-(-4)^{-n}}{5}}$ для всех $n \geq 0$. База индукции: пусть $n = 0$. Имеем $x_0 = 1$ и $y_0 = 16^{\frac{1-(-4)^{-n}}{5}} = 16^0 = 1$. Значит, $x_0 = y_0$ и база индукции доказана.
Индукционная гипотеза: пусть для некоторого $n \geq 0$ выполнено $x_n = y_n$.
Шаг индукции: докажем, что $x_{n+1} = y_{n+1}$. Имеем $x_{n+1} = (\frac{16}{x_n})^{\frac{1}{4}} =$ (согласно индукционной гипотезе) $= (\frac{16}{y_n})^{\frac{1}{4}} = (\frac{16}{16^{\frac{1-(-4)^{-n}}{5}}})^{\frac{1}{4}} = 16^{\frac{1-\frac{1-(-4)^{-n}}{5}}{4}}$
Займемся показателем степени:

$$p = \frac{1 - \frac{1-(-4)^{-n}}{5}}{4} = \frac{(4+1) - 1 + (-4)^{-n}}{4 \cdot 5} = \frac{1 - (-4)^{-(n+1)}}{5}$$

Следовательно, $x_{n+1} = 16^p = 16^{\frac{1-(-4)^{-(n+1)}}{5}} = y_{n+1}$, что доказывает шаг индукции и завершает доказательство совпадения последовательностей x_n и y_n для всех $n \geq 0$.
Теперь докажем, что для некоторого n_0 и всех $n \geq n_0$ выполнено $y_n \leq 2$. Для этого надо показать, что для всех этих n верно

$$\frac{1 - (-4)^{-(n+1)}}{5} \leq \frac{1}{4}$$

Это неравенство для $n \geq 1$ следует из $1 - (-4)^{-n} \leq \frac{5}{4}$.

Solution (ENG). Let's prove (by induction on $n \geq 0$) that the sequence described in the task coincides with the sequence $y_n = 16^{\frac{1-(-4)^{-n}}{5}}$ for all non-negative integers n. Base of the induction: let $n = 0$. We have $x_0 = 1$ and $y_0 = 16^{\frac{1-(-4)^{-n}}{5}} = 16^0 = 1$. Thus, $x_0 = y_0$ and the base is proved.
Induction hypothesis: let for some $n \geq 0$ we have $x_n = y_n$.
Step of induction: let's prove that $x_{n+1} = y_{n+1}$. We have $x_{n+1} = (\frac{16}{x_n})^{\frac{1}{4}} =$ (by induction hypothesis)

$= (\frac{16}{y_n})^{\frac{1}{4}} = (\frac{16}{16^{\frac{1-(-4)^{-n}}{5}}})^{\frac{1}{4}} = 16^{\frac{1-\frac{1-(-4)^{-n}}{5}}{4}}$
Let's count the power of 16:

$$p = \frac{1 - \frac{1-(-4)^{-n}}{5}}{4} = \frac{(4+1) - 1 + (-4)^{-n}}{4 \cdot 5} = \frac{1 - (-4)^{-(n+1)}}{5}$$

Thus, we have $x_{n+1} = 16^p = 16^{\frac{1-(-4)^{-(n+1)}}{5}} = y_{n+1}$, which proves our induction's step and finishes the proof.
Now, let's prove that for some n_0 and all $n \geq n_0$ we have $y_n \leq 2$. For that we must prove that for all these n we have

$$\frac{1 - (-4)^{-(n+1)}}{5} \leq \frac{1}{4}$$

That's because for all $n \geq 1$ we get $1 - (-4)^{-n} \leq \frac{5}{4}$.

11 класс, задача №1 (краткий числовой ответ, 3 балла)
11th degree, task 1 (short answer, 3 points)

1. Предприниматель арендовал место на складе и ему на этот склад были доставлены 3000 посылок. У начальника склада есть стандартные формы распоряжений для охраны склада: "Удержать посылки №№"и "Отпустить посылки №№". Начальник склада и предприниматель играют в следующую игру: за один ход начальник вписывает произвольные номера посылок в одну такую форму, отдает предпринимателю, а предприниматель оставляет в ней одно из слов – "удержать"или "отпустить". Далее, если предприниматель попросит, начальник склада выписывает новое распоряжение (номера посылок в нем могут совпадать с номерами посылок в предыдущих распоряжениях). Если в распоряжении остается слово "отпустить то предприниматель забирает со склада все посылки, перечисленные в этой бумаге. Если же остается слово "удержать то предприниматель забирает со склада все посылки, НЕ указанные в этой бумаге.
Какого количества таких бумаг предпринимателю гарантированно хватит, чтобы забрать все посылки со склада?

   The entrepreneur rented a space in the warehouse and 3000 of parcels were delivered to this warehouse. The warehouse manager has standard order forms for guarding the warehouse: "Hold parcels"and "Release parcels". The warehouse manager and the entrepreneur play the following game: in one move, the manager enters arbitrary numbers of parcels into one such form, gives it to the entrepreneur and the entrepreneur leaves in it one of the words - "hold"or "release". If the entrepreneur asks, the warehouse manager writes out a new order (the numbers of the parcels in it may coincide with the numbers of the parcels in the previous orders). If the word "release"remains at the disposal then the entrepreneur takes from the warehouse all the parcels listed in this paper. If the word "hold"remains then the entrepreneur takes from the warehouse all the parcels that are NOT specified in this paper.
How many such papers are guaranteed to be enough for an entrepreneur to pick up all the parcels from the warehouse?

   12

2. Предприниматель арендовал место на складе и ему на этот склад были доставлены 5000 посылок. У начальника склада есть стандартные формы распоряжений для охраны склада: "Удержать посылки №№"и "Отпустить посылки №№". Начальник склада и предприниматель играют в следующую игру: за один ход начальник вписывает произвольные номера посылок

в одну такую форму, отдает предпринимателю, а предприниматель оставляет в ней одно из слов – "удержать"или "отпустить". Далее, если предприниматель попросит, начальник склада выписывает новое распоряжение (номера посылок в нем могут совпадать с номерами посылок в предыдущих распоряжениях). Если в распоряжении остается слово "отпустить то предприниматель забирает со склада все посылки, перечисленные в этой бумаге. Если же остается слово "удержать то предприниматель забирает со склада все посылки, НЕ указанные в этой бумаге.
Какого количества таких бумаг предпринимателю гарантированно хватит, чтобы забрать все посылки со склада?

The entrepreneur rented a space in the warehouse and 5000 of parcels were delivered to this warehouse. The warehouse manager has standard order forms for guarding the warehouse: "Hold parcels"and "Release parcels". The warehouse manager and the entrepreneur play the following game: in one move, the manager enters arbitrary numbers of parcels into one such form, gives it to the entrepreneur and the entrepreneur leaves in it one of the words - "hold"or "release". If the entrepreneur asks, the warehouse manager writes out a new order (the numbers of the parcels in it may coincide with the numbers of the parcels in the previous orders). If the word "release"remains at the disposal then the entrepreneur takes from the warehouse all the parcels listed in this paper. If the word "hold"remains then the entrepreneur takes from the warehouse all the parcels that are NOT specified in this paper.
How many such papers are guaranteed to be enough for an entrepreneur to pick up all the parcels from the warehouse?

13

3. Предприниматель арендовал место на складе и ему на этот склад были доставлены 2000 посылок. У начальника склада есть стандартные формы распоряжений для охраны склада: "Удержать посылки №№"и "Отпустить посылки №№". Начальник склада и предприниматель играют в следующую игру: за один ход начальник вписывает произвольные номера посылок в одну такую форму, отдает предпринимателю, а предприниматель оставляет в ней одно из слов – "удержать"или "отпустить". Далее, если предприниматель попросит, начальник склада выписывает новое распоряжение (номера посылок в нем могут совпадать с номерами посылок в предыдущих распоряжениях). Если в распоряжении остается слово "отпустить то предприниматель забирает со склада все посылки, перечисленные в этой бумаге. Если же остается слово "удержать то предприниматель забирает со склада все посылки, НЕ указанные в этой бумаге.
Какого количества таких бумаг предпринимателю гарантированно хватит, чтобы забрать все посылки со склада?

The entrepreneur rented a space in the warehouse and 2000 of parcels were delivered to this warehouse. The warehouse manager has standard order forms for guarding the warehouse: "Hold parcels"and "Release parcels". The warehouse manager and the entrepreneur play the following game: in one move, the manager enters arbitrary numbers of parcels into one such form, gives it to the entrepreneur and the entrepreneur leaves in it one of the words - "hold"or "release". If the entrepreneur asks, the warehouse manager writes out a new order (the numbers of the parcels in it may coincide with the numbers of the parcels in the previous orders). If the word "release"remains at the disposal then the entrepreneur takes from the warehouse all the parcels listed in this paper. If the word "hold"remains then the entrepreneur takes from the warehouse all the parcels that are NOT specified in this paper.
How many such papers are guaranteed to be enough for an entrepreneur to pick up all the parcels from the warehouse?

11

4. Предприниматель арендовал место на складе и ему на этот склад были доставлены 18000 посылок. У начальника склада есть стандартные формы распоряжений для охраны склада: "Удержать посылки №№"и "Отпустить посылки №№". Начальник склада и предприниматель играют в следующую игру: за один ход начальник вписывает произвольные номера посылок в одну такую форму, отдает предпринимателю, а предприниматель оставляет в ней одно из слов – "удержать"или "отпустить". Далее, если предприниматель попросит, начальник склада выписывает новое распоряжение (номера посылок в нем могут совпадать с номерами посылок в предыдущих распоряжениях). Если в распоряжении остается слово "отпустить то предприниматель забирает со склада все посылки, перечисленные в этой бумаге. Если же остается слово "удержать то предприниматель забирает со склада все посылки, НЕ указанные в этой бумаге.
Какого количества таких бумаг предпринимателю гарантированно хватит, чтобы забрать все посылки со склада?

The entrepreneur rented a space in the warehouse and 18000 of parcels were delivered to this warehouse. The warehouse manager has standard order forms for guarding the warehouse: "Hold parcels"and "Release parcels". The warehouse manager and the entrepreneur play the following game: in one move, the manager enters arbitrary numbers of parcels into one such form, gives it to the entrepreneur and the entrepreneur leaves in it one of the words - "hold"or "release". If the entrepreneur asks, the warehouse manager writes out a new order (the numbers of the parcels in it may coincide with the numbers of the parcels in the previous orders). If the word "release"remains at the disposal then the entrepreneur takes from the warehouse all the parcels listed in this paper. If the word "hold"remains then the entrepreneur takes from the warehouse all the parcels that are NOT specified in this paper.
How many such papers are guaranteed to be enough for an entrepreneur to pick up all the parcels from the warehouse?

15

11 класс, задача №2 (краткий числовой ответ, 3 балла)
11th degree, task 2 (short answer, 3 points)

1. Сколько вещественных корней имеет уравнение

$$1994 \cdot x^{1994} + 26 \cdot x^{26} = 2020$$

?

How many real numbers are the roots of this equation

$$1994 \cdot x^{1994} + 26 \cdot x^{26} = 2020$$

?

2

2. Сколько вещественных корней имеет уравнение

$$1998 \cdot x^{1998} + 22 \cdot x^{22} = 2020$$

?

How many real numbers are the roots of this equation

$$1998 \cdot x^{1998} + 22 \cdot x^{22} = 2020$$

?

2

3. Сколько вещественных корней имеет уравнение

$$2003 \cdot x^{2003} + 17 \cdot x^{17} = 2020$$

?

How many real numbers are the roots of this equation

$$2003 \cdot x^{2003} + 17 \cdot x^{17} = 2020$$

?

1

4. Сколько вещественных корней имеет уравнение

$$1979 \cdot x^{1979} + 41 \cdot x^{41} = 2020$$

?

How many real numbers are the roots of this equation

$$1979 \cdot x^{1979} + 41 \cdot x^{41} = 2020$$

?

1

11 класс, задача №3 (краткий числовой ответ, 4 балла)
11th degree, task 3 (short answer, 4 points)

1. Дан выпуклый четырехугольник $ABCD$ и точка P внутри него. $AB = 7\sqrt{2}, AP = 3\sqrt{11}, \angle PAD = 22.5°, \angle PBA = 45°, \angle APD = 67.5°, \angle PBC = \beta, \angle PAB = 2\beta, \angle BPC = 3\beta$. Найдите расстояние от точки пересечения биссектрис углов ADP и BCP до прямой AB.

   Convex quadrilateral $ABCD$ has a point P inside itself. It is given that $AB = 7\sqrt{2}, AP = 3\sqrt{11}, \angle PAD = 22.5°, \angle PBA = 45°, \angle APD = 67.5°, \angle PBC = \beta, \angle PAB = 2\beta, \angle BPC = 3\beta$. Let Q be the point of intersection of the bisectors of $\angle ADP$ and $\angle BCP$. Find the distance from Q to the line AB.

   5

2. Дан выпуклый четырехугольник $ABCD$ и точка P внутри него. $AB = 4\sqrt{11}, AP = 6\sqrt{6}, \angle PAD = 22.5°, \angle PBA = 45°, \angle APD = 67.5°, \angle PBC = \beta, \angle PAB = 2\beta, \angle BPC = 3\beta$. Найдите расстояние от точки пересечения биссектрис углов ADP и BCP до прямой AB.

   Convex quadrilateral $ABCD$ has a point P inside itself. It is given that $AB = 4\sqrt{11}, AP = 6\sqrt{6}, \angle PAD = 22.5°, \angle PBA = 45°, \angle APD = 67.5°, \angle PBC = \beta, \angle PAB = 2\beta, \angle BPC = 3\beta$. Let Q be the point of intersection of the bisectors of $\angle ADP$ and $\angle BCP$. Find the distance from Q to the line AB.

   8

3. Дан выпуклый четырехугольник $ABCD$ и точка P внутри него. $AB = 7\sqrt{2}, AP = 9, \angle PAD = 22.5°, \angle PBA = 45°, \angle APD = 67.5°, \angle PBC = \beta, \angle PAB = 2\beta, \angle BPC = 3\beta$. Найдите расстояние от точки пересечения биссектрис углов ADP и BCP до прямой AB.

   Convex quadrilateral $ABCD$ has a point P inside itself. It is given that $AB = 7\sqrt{2}, AP = 9, \angle PAD = 22.5°, \angle PBA = 45°, \angle APD = 67.5°, \angle PBC = \beta, \angle PAB = 2\beta, \angle BPC = 3\beta$. Let Q be the point of intersection of the bisectors of $\angle ADP$ and $\angle BCP$. Find the distance from Q to the line AB.

   4

4. Дан выпуклый четырехугольник $ABCD$ и точка P внутри него. $AB = 3\sqrt{2}, AP = 9, \angle PAD = 22.5°, \angle PBA = 45°, \angle APD = 67.5°, \angle PBC = \beta, \angle PAB = 2\beta, \angle BPC = 3\beta$. Найдите расстояние от точки пересечения биссектрис углов ADP и BCP до прямой AB.

   Convex quadrilateral $ABCD$ has a point P inside itself. It is given that $AB = 3\sqrt{2}, AP = 9, \angle PAD = 22.5°, \angle PBA = 45°, \angle APD = 67.5°, \angle PBC = \beta, \angle PAB = 2\beta, \angle BPC = 3\beta$. Let Q be the point of intersection of the bisectors of $\angle ADP$ and $\angle BCP$. Find the distance from Q to the line AB.

   6

11 класс, задача №4 (краткий числовой ответ, 5 балла)
11th degree, task 4 (short answer, 5 points)

1. Многочлен $P(x) = x^4 + ax^3 + 6x^2 + cx + 1$ имеет четыре вещественных корня: x_1, x_2, x_3, x_4. Найти наименьшее возможное значение выражения $(x_1^2+1)(x_2^2+1)(x_3^2+1)(x_4^2+1)$.

   The polynom $P(x) = x^4 + ax^3 + 6x^2 + cx + 1$ has four real roots: x_1, x_2, x_3, x_4. Find smallest possible value of $(x_1^2+1)(x_2^2+1)(x_3^2+1)(x_4^2+1)$.

   16

2. Многочлен $P(x) = x^4 + ax^3 + 7x^2 + cx + 1$ имеет четыре вещественных корня: x_1, x_2, x_3, x_4. Найти наименьшее возможное значение выражения $(x_1^2+1)(x_2^2+1)(x_3^2+1)(x_4^2+1)$.

   The polynom $P(x) = x^4 + ax^3 + 7x^2 + cx + 1$ has four real roots: x_1, x_2, x_3, x_4. Find smallest possible value of $(x_1^2+1)(x_2^2+1)(x_3^2+1)(x_4^2+1)$.

   25

3. Многочлен $P(x) = x^4 + ax^3 - 5x^2 + cx + 1$ имеет четыре вещественных корня: x_1, x_2, x_3, x_4. Найти наименьшее возможное значение выражения $(x_1^2+1)(x_2^2+1)(x_3^2+1)(x_4^2+1)$.

   The polynom $P(x) = x^4 + ax^3 - 5x^2 + cx + 1$ has four real roots: x_1, x_2, x_3, x_4. Find smallest possible value of $(x_1^2+1)(x_2^2+1)(x_3^2+1)(x_4^2+1)$.

   49

4. Многочлен $P(x) = x^4 + ax^3 - x^2 + cx + 1$ имеет четыре вещественных корня: x_1, x_2, x_3, x_4. Найти наименьшее возможное значение выражения $(x_1^2+1)(x_2^2+1)(x_3^2+1)(x_4^2+1)$.

   The polynom $P(x) = x^4 + ax^3 - x^2 + cx + 1$ has four real roots: x_1, x_2, x_3, x_4. Find smallest possible value of $(x_1^2+1)(x_2^2+1)(x_3^2+1)(x_4^2+1)$.

9

11 класс, задача №5 (развернутое решение, 6 баллов)
11th degree, task 5 (detailed answer, 6 points)

1. Дан 80-угольник $A_1A_2\dots A_{80}$, такой, что сумма длин четных сторон не равна сумме длин нечетных сторон (то есть $A_1A_2+A_3A_4+\dots+A_{79}A_{80} \neq A_2A_3+A_4A_5+\dots+A_{80}A_1$). Докажите, что не существует такой бесконечной последовательности точек $X_0, X_1, X_2, \dots$ на сторонах этого многоугольника, что точка X_0 лежит на стороне $A_{80}A_1$ и для любого целого $k \geq 0$ точка X_{80k+1} лежит на стороне A_1A_2, точка X_{80k+2} – на стороне $A_2A_3, \dots$, точка $X_{80(k+1)}$ – на стороне $A_{80}A_1$, причем $A_1X_{80k} = A_1X_{80k+1}, A_2X_{80k+1} = A_2X_{80k+2}, \dots, A_{80}X_{80k+79} = A_{80}X_{80(k+1)}$.

   There is a polygon $A_1A_2\dots A_{80}$ such that sum of its odd-numbered sides is not equal to sum of even-numbered sides ($A_1A_2+A_3A_4+\dots+A_{79}A_{80} \neq A_2A_3+A_4A_5+\dots+A_{80}A_1$). Prove that it's impossible to construct an infinite sequence $X_0, X_1, X_2, \dots$ of points on sides of the polygon (point X_0 lies on $A_{80}A_1$ and for every non-negative integer k point X_{80k+1} lies on A_1A_2, point X_{80k+2} lies on $A_2A_3, \dots$, point $X_{80(k+1)}$ lies on $A_{80}A_1$) such that $A_1X_{80k} = A_1X_{80k+1}, A_2X_{80k+1} = A_2X_{80k+2}, \dots, A_{80}X_{80k+79} = A_{80}X_{80(k+1)}$.

2. Дан 60-угольник $A_1A_2\dots A_{60}$, такой, что сумма длин четных сторон не равна сумме длин нечетных сторон (то есть $A_1A_2+A_3A_4+\dots+A_{59}A_{60} \neq A_2A_3+A_4A_5+\dots+A_{60}A_1$). Докажите, что не существует такой бесконечной последовательности точек $X_0, X_1, X_2, \dots$ на сторонах этого многоугольника, что точка X_0 лежит на стороне $A_{60}A_1$ и для любого целого $k \geq 0$ точка X_{60k+1} лежит на стороне A_1A_2, точка X_{60k+2} – на стороне $A_2A_3, \dots$, точка $X_{60(k+1)}$ – на стороне $A_{60}A_1$, причем $A_1X_{60k} = A_1X_{60k+1}, A_2X_{60k+1} = A_2X_{60k+2}, \dots, A_{60}X_{60k+59} = A_{60}X_{60(k+1)}$.

   There is a polygon $A_1A_2\dots A_{60}$ such that sum of its odd-numbered sides is not equal to sum of even-numbered sides ($A_1A_2+A_3A_4+\dots+A_{59}A_{60} \neq A_2A_3+A_4A_5+\dots+A_{60}A_1$). Prove that it's impossible to construct an infinite sequence $X_0, X_1, X_2, \dots$ of points on sides of the polygon (point X_0 lies on $A_{60}A_1$ and for every non-negative integer k point X_{60k+1} lies on A_1A_2, point X_{60k+2} lies on $A_2A_3, \dots$, point $X_{60(k+1)}$ lies on $A_{60}A_1$) such that $A_1X_{60k} = A_1X_{60k+1}, A_2X_{60k+1} = A_2X_{60k+2}, \dots, A_{60}X_{60k+59} = A_{60}X_{60(k+1)}$.

3. Дан 30-угольник $A_1A_2\dots A_{30}$, такой, что сумма длин четных сторон не равна сумме длин нечетных сторон (то есть $A_1A_2+A_3A_4+\dots+A_{29}A_{30} \neq A_2A_3+A_4A_5+\dots+A_{30}A_1$). Докажите, что не существует такой бесконечной последовательности точек $X_0, X_1, X_2, \dots$ на сторонах этого многоугольника, что точка X_0 лежит на стороне $A_{30}A_1$ и для любого целого $k \geq 0$ точка X_{30k+1} лежит на стороне A_1A_2, точка X_{30k+2} – на стороне $A_2A_3, \dots$, точка $X_{30(k+1)}$ – на стороне $A_{30}A_1$, причем $A_1X_{30k} = A_1X_{30k+1}, A_2X_{30k+1} = A_2X_{30k+2}, \dots, A_{30}X_{30k+29} = A_{30}X_{30(k+1)}$.

   There is a polygon $A_1A_2\dots A_{30}$ such that sum of its odd-numbered sides is not equal to sum of even-numbered sides ($A_1A_2+A_3A_4+\dots+A_{29}A_{30} \neq A_2A_3+A_4A_5+\dots+A_{30}A_1$). Prove that it's impossible to construct an infinite sequence $X_0, X_1, X_2, \dots$ of points on sides of the polygon (point X_0 lies on $A_{30}A_1$ and for every non-negative integer k point X_{30k+1} lies on A_1A_2, point X_{30k+2} lies on $A_2A_3, \dots$, point $X_{30(k+1)}$ lies on $A_{30}A_1$) such that $A_1X_{30k} = A_1X_{30k+1}, A_2X_{30k+1} = A_2X_{30k+2}, \dots, A_{30}X_{30k+29} = A_{30}X_{30(k+1)}$.

4. Дан 50-угольник $A_1A_2\ldots A_{50}$, такой, что сумма длин четных сторон не равна сумме длин нечетных сторон (то есть $A_1A_2+A_3A_4+\cdots+A_{49}A_{50} \neq A_2A_3+A_4A_5+\cdots+A_{50}A_1$). Докажите, что не существует такой бесконечной последовательности точек $X_0, X_1, X_2, \ldots$ на сторонах этого многоугольника, что точка X_0 лежит на стороне $A_{50}A_1$ и для любого целого $k \geq 0$ точка X_{50k+1} лежит на стороне A_1A_2, точка X_{50k+2} – на стороне $A_2A_3, \ldots$, точка $X_{50(k+1)}$ – на стороне $A_{50}A_1$, причем $A_1X_{50k} = A_1X_{50k+1}, A_2X_{50k+1} = A_2X_{50k+2}, \ldots, A_{50}X_{50k+49} = A_{50}X_{50(k+1)}$.

   There is a polygon $A_1A_2\ldots A_{50}$ such that sum of its odd-numbered sides is not equal to sum of even-numbered sides ($A_1A_2+A_3A_4+\cdots+A_{49}A_{50} \neq A_2A_3+A_4A_5+\cdots+A_{50}A_1$). Prove that it's impossible to construct an infinite sequence $X_0, X_1, X_2, \ldots$ of points on sides of the polygon (point X_0 lies on $A_{50}A_1$ and for every non-negative integer k point X_{50k+1} lies on A_1A_2, point X_{50k+2} lies on $A_2A_3, \ldots$, point $X_{50(k+1)}$ lies on $A_{50}A_1$) such that $A_1X_{50k} = A_1X_{50k+1}, A_2X_{50k+1} = A_2X_{50k+2}, \ldots, A_{50}X_{50k+49} = A_{50}X_{50(k+1)}$.

11 класс, задача №6 (развернутое решение, 8 баллов)
11th degree, task 6 (detailed answer, 8 points)

1. В школьном классе сидели 10 учеников, каждому из которых присвоен номер (натуральное число от 1 до 10), все номера при этом различны. Учитель случайным образом раздал каждому ученику по одной карточке, на которой написано натуральное число от 1 до 10 (числа на всех карточках также различны). Далее начинается игра по следующим правилам: любые два ученика могут обменяться своими карточками, но лишь один раз (второй прямой обмен между этими же учениками запрещен), затем другая пара и т.д. Цель игры - добиться того, чтобы номер каждого ученика совпадал с номером его карточки. Всегда ли такой исход достижим? Если нет, то учитель может пригласить в класс дополнительно n учеников, раздать им номера с 11 по $(10+n)$-й и карточки с соответствующими им номерами. При каком наименьшем n цель игры может быть гарантированно достигнута при любом начальном распределении карточек?

   There are 10 students in a classroom, each of them was assigned a number (an integer from 1 to 10) with all the numbers are different. The teacher randomly distributed one card (with an integer from 1 to 10 written on it) to each student with the numbers on the cards are also different. Then the following game starts: any two students can exchange their cards, but only once (the second direct exchange between the same pair of students is prohibited), then another pair, etc. The goal of the game is to ensure that the number of each student matches the number of his card. Is such an outcome possible? If not, the teacher can invite an additional n students to the classroom and give them numbers from 11 to $10+n$ and cards corresponding to their numbers. What is the smallest n such that the goal of the game can be guaranteed to be achieved for any initial conditions?

2. В школьном классе сидели 12 учеников, каждому из которых присвоен номер (натуральное число от 1 до 12), все номера при этом различны. Учитель случайным образом раздал каждому ученику по одной карточке, на которой написано натуральное число от 1 до 12 (числа на всех карточках также различны). Далее начинается игра по следующим правилам: любые два ученика могут обменяться своими карточками, но лишь один раз (второй прямой обмен между этими же учениками запрещен), затем другая пара и т.д. Цель игры -

добиться того, чтобы номер каждого ученика совпадал с номером его карточки. Всегда ли такой исход достижим? Если нет, то учитель может пригласить в класс дополнительно n учеников, раздать им номера с 13 по $(12+n)$-й и карточки с соответствующими им номерами. При каком наименьшем n цель игры может быть гарантированно достигнута при любом начальном распределении карточек?

There are 12 students in a classroom, each of them was assigned a number (an integer from 1 to 12) with all the numbers are different. The teacher randomly distributed one card (with an integer from 1 to 12 written on it) to each student with the numbers on the cards are also different. Then the following game starts: any two students can exchange their cards, but only once (the second direct exchange between the same pair of students is prohibited), then another pair, etc. The goal of the game is to ensure that the number of each student matches the number of his card. Is such an outcome possible? If not, the teacher can invite an additional n students to the classroom and give them numbers from 13 to $12+n$ and cards corresponding to their numbers. What is the smallest n such that the goal of the game can be guaranteed to be achieved for any initial conditions?

3. В школьном классе сидели 9 учеников, каждому из которых присвоен номер (натуральное число от 1 до 9), все номера при этом различны. Учитель случайным образом раздал каждому ученику по одной карточке, на которой написано натуральное число от 1 до 9 (числа на всех карточках также различны). Далее начинается игра по следующим правилам: любые два ученика могут обменяться своими карточками, но лишь один раз (второй прямой обмен между этими же учениками запрещен), затем другая пара и т.д. Цель игры - добиться того, чтобы номер каждого ученика совпадал с номером его карточки. Всегда ли такой исход достижим? Если нет, то учитель может пригласить в класс дополнительно n учеников, раздать им номера с 10 по $(9+n)$-й и карточки с соответствующими им номерами. При каком наименьшем n цель игры может быть гарантированно достигнута при любом начальном распределении карточек?

   There are 9 students in a classroom, each of them was assigned a number (an integer from 1 to 9) with all the numbers are different. The teacher randomly distributed one card (with an integer from 1 to 9 written on it) to each student with the numbers on the cards are also different. Then the following game starts: any two students can exchange their cards, but only once (the second direct exchange between the same pair of students is prohibited), then another pair, etc. The goal of the game is to ensure that the number of each student matches the number of his card. Is such an outcome possible? If not, the teacher can invite an additional n students to the classroom and give them numbers from 10 to $9+n$ and cards corresponding to their numbers. What is the smallest n such that the goal of the game can be guaranteed to be achieved for any initial conditions?

4. В школьном классе сидели 11 учеников, каждому из которых присвоен номер (натуральное число от 1 до 11), все номера при этом различны. Учитель случайным образом раздал каждому ученику по одной карточке, на которой написано натуральное число от 1 до 11 (числа на всех карточках также различны). Далее начинается игра по следующим правилам: любые два ученика могут обменяться своими карточками, но лишь один раз (второй прямой обмен между этими же учениками запрещен), затем другая пара и т.д. Цель игры - добиться того, чтобы номер каждого ученика совпадал с номером его карточки. Всегда ли такой исход достижим? Если нет, то учитель может пригласить в класс дополнительно n учеников, раздать им номера с 12 по $(11+n)$-й и карточки с соответствующими им номера-

ми. При каком наименьшем n цель игры может быть гарантированно достигнута при любом начальном распределении карточек?

There are 11 students in a classroom, each of them was assigned a number (an integer from 1 to 11) with all the numbers are different. The teacher randomly distributed one card (with an integer from 1 to 11 written on it) to each student with the numbers on the cards are also different. Then the following game starts: any two students can exchange their cards, but only once (the second direct exchange between the same pair of students is prohibited), then another pair, etc. The goal of the game is to ensure that the number of each student matches the number of his card. Is such an outcome possible? If not, the teacher can invite an additional n students to the classroom and give them numbers from 12 to $11 + n$ and cards corresponding to their numbers. What is the smallest n such that the goal of the game can be guaranteed to be achieved for any initial conditions?

11 класс. Разбор задач
11th degree. Solution of tasks

Task 1. Предприниматель арендовал место на складе и ему на этот склад были доставлены 3000 посылок. У начальника склада есть стандартные формы распоряжений для охраны склада: "Удержать посылки №№"и "Отпустить посылки №№". Начальник склада и предприниматель играют в следующую игру: за один ход начальник вписывает произвольные номера посылок в одну такую форму, отдает предпринимателю, а предприниматель оставляет в ней одно из слов – "удержать"или "отпустить". Далее, если предприниматель попросит, начальник склада выписывает новое распоряжение (номера посылок в нем могут совпадать с номерами посылок в предыдущих распоряжениях). Если в распоряжении остается слово "отпустить то предприниматель забирает со склада все посылки, перечисленные в этой бумаге. Если же остается слово "удержать то предприниматель забирает со склада все посылки, НЕ указанные в этой бумаге.
Какого количества таких бумаг предпринимателю гарантированно хватит, чтобы забрать все посылки со склада?

The entrepreneur rented a space in the warehouse and 3000 of parcels were delivered to this warehouse. The warehouse manager has standard order forms for guarding the warehouse: "Hold parcels"and "Release parcels". The warehouse manager and the entrepreneur play the following game: in one move, the manager enters arbitrary numbers of parcels into one such form, gives it to the entrepreneur and the entrepreneur leaves in it one of the words - "hold"or "release". If the entrepreneur asks, the warehouse manager writes out a new order (the numbers of the parcels in it may coincide with the numbers of the parcels in the previous orders). If the word "release"remains at the disposal then the entrepreneur takes from the warehouse all the parcels listed in this paper. If the word "hold"remains then the entrepreneur takes from the warehouse all the parcels that are NOT specified in this paper.
How many such papers are guaranteed to be enough for an entrepreneur to pick up all the parcels from the warehouse?

Solution (RUS). Будем считать, что после заполения бумаги обоими участниками, предприниматель сразу забирает причитающиеся по бумаге посылки со склада. То есть, если посылка могла быть выдана предпринимателю по предыдущей бумаге, то к моменту заполнения следующей бумаги мы считаем, что послыка уже получена. Очевидно, что, подавая бумаги охране ровно в том порядке, в котором они были получены, предприниматель сможет и позже повторить ровно такую же последовательность забора посылок.

Чтобы справиться не более чем за 12 вопросов, предпринимателю следует делать так: при выписывании очередной бумаги начальником склада, предприниматель проверяет, чего больше – посылок, включенных в бумагу, или не включенных в нее (с учетом того, что по предыдущим бумагам часть посылок уже выдана). В зависимости от этого он выбирает тот вариант, при котором заберет больше посылок. Таким образом, с каждой бумагой он будет забирать не менее половины от имеющихся на складе посылок.
Значит, после выписывания 12 бумаг на складе останется не более $\frac{3000}{2^{12}} = \frac{3000}{4096}$ посылок, что меньше 1. Таким образом, на складе не останется посылок.
С другой стороны, начальник склада может каждый раз писать ровно половину (с точностью до округления до целого) оставшихся посылок и тем самым гарантировать, что после выписывания k-й бумаги на складе останется не менее $\lfloor\frac{3000}{2^k}\rfloor$ посылок, т.е. 11 бумаг может не хватить.

Solution (ENG). We will assume that after filling out the form by both participants, the entrepreneur immediately picks up the parcels due on paper from the warehouse. That is, if the parcel could have been issued to the entrepreneur using the previous paper, then by the time the next paper is filled in, we consider that the parcel has already been received. Obviously, by submitting the papers to the guards exactly in the order in which they were received, the entrepreneur will be able to repeat exactly the same sequence of picking up the parcels later.
To succeed with no more than 12 papers an entrepreneur should do like follows: when the warehouse manager writes out another paper, the entrepreneur checks what is more – parcels included in the paper, or not included in it (taking into account the fact that according to the previous papers some of the parcels already issued). Depending on this, he chooses the option in which he will take more parcels. Thus, with each paper, he will pick up at least half of the parcels available in the warehouse.
This means that after writing out 12 papers, no more than $\frac{3000}{2^{12}} = \frac{3000}{4096}$ parcels will remain in the warehouse, which is less than 1. Thus, there will be no parcels left in the warehouse.
On the other hand, the warehouse manager can each time write exactly half (up to rounding to the nearest integer) of the remaining parcels and thereby ensure that after the k -th paper is written out, at least $\lfloor\frac{3000}{2^k}\rfloor$ parcels, i.e. 11 papers may not be enough.

Answer: 12

Task 2. Сколько вещественных корней имеет уравнение

$$1994 \cdot x^{1994} + 26 \cdot x^{26} = 2020$$

?

How many real numbers are the roots of this equation

$$1994 \cdot x^{1994} + 26 \cdot x^{26} = 2020$$

?

Solution (RUS). Обозначим многочлен (выражение) $y \cdot x^y + kx^k - 2020$ через $P(x)$. Нам надо найти число корней этого многочлена. Заметим, что по условию задачи $y + k = 2020$. Необходимо рассмотреть два случая: когда y – четный и когда он нечетный.
Сначала рассмотрим случай, когда y – четное число. Так как $P(-\infty) = +\infty, P(+\infty) = +\infty$ и $P(0) = -2020 < 0$, то уравнение имеет как минимум 2 корня. Заметим, что корень уравнения обязательно разделяет две экстремальные точки графика непрерывной функции. Поэтому давайте найдем вещественные точки, в которых $P(x)$ может иметь экстремум. Для этого найдем производную $P'(x) = y^2x^{y-1} + k^2x^{k-1} = x^{k-1}(y^2x^{y-k} + k^2)$ и найдем ее корни (как кандидаты на

экстремальные точки $P(x)$): $P'(x)=0$ только при $x=0$ (так как выражение $y^2x^{y-k}+k^2$ всегда положительно). Следовательно, между $-\infty$ и $+\infty$ только одна экстремальная точка, а следовательно, если y – четное число, то уравнение $y\cdot x^y+kx^k=2020$ имеет ровно два вещественных корня.
Теперь рассмотрим случай, когда y – нечетное число. Так как $P(-\infty)=-\infty, P(+\infty)=+\infty$, то уравнение имеет как минимум 1 корень. Исследуем график функции $P(x)$. Для этого найдем производную $P'(x)=y^2x^{y-1}+k^2x^{k-1}=x^{k-1}(y^2x^{y-k}+k^2)$. Так как $y+k=2020$ и $y>k$, то $(y-k)>0$ – четное число, k – нечетное число, а $(k-1)$ – четное число. Поэтому $P'(x)=x^{k-1}(y^2x^{y-k}+k^2)\geq 0$ на всей числовой прямой, и следовательно, между $-\infty$ и $+\infty$ функция $P(x)$ не убывает, а уравнение $yx^y+kx^k=2020$ имеет только один вещественный корень.

Solution (ENG). We denote the polynomial $y\cdot x^y+kx^k-2020$ by $P(x)$. We need to find the number of roots of this polynomial. Note that by the problem statement we have $y+k=2020$. There are two cases to consider: when y is even and when it is odd.
First, consider the case where y is an even number. Since $P(-\infty)=+\infty, P(+\infty)=+\infty$ and $P(0)=-2020<0$, the equation has at least 2 roots. Note that the root of the equation necessarily separates two extreme points of the graph of a continuous function. So let's find real points where $P(x)$ can have an extremum. To do this, we find the derivative $P'(x)=y^2x^{y-1}+k^2x^{k-1}=x^{k-1}(y^2x^{yk}+k^2)$ and find its roots (as candidates for the extreme points $P(x)$): $P'(x)=0$ only for $x=0$ (since the expression $y^2x^{yk}+k^2$ is always positive). Therefore, there is only one extremal point between $-\infty$ and $+\infty$, and therefore, if y is an even number, then the equation $y\cdot x^y+kx^k=2020$ has exactly two real roots.
Now consider the case where y is odd. Since $P(-\infty)=-\infty, P(+\infty)=+\infty$, the equation has at least 1 root. Let us examine the graph of the function $P(x)$. To do this, we find the derivative $P'(x)=y^2x^{y-1}+k^2x^{k-1}=x^{k-1}(y^2x^{yk}+k^2)$. Since $y+k=2020$ and $y>k$, then $(y-k)>0$ is an even number, k is an odd number, and $(k-1)$ is an even number. Therefore, $P'(x)=x^{k-1}(y^2x^{yk}+k^2)\geq 0$ on the whole number line, and therefore between $-\infty$ and $+\infty$ the function $P(x)$ does not decrease, and the equation $yx^y+kx^k=2020$ has only one real root.

Answer: 2

Task 3. Дан выпуклый четырехугольник $ABCD$ и точка P внутри него. $AB=7\sqrt{2}, AP=3\sqrt{11}, \angle PAD=22.5°, \angle PBA=45°, \angle APD=67.5°, \angle PBC=\beta, \angle PAB=2\beta, \angle BPC=3\beta$. Найдите расстояние от точки пересечения биссектрис углов ADP и BCP до прямой AB.

Convex quadrilateral $ABCD$ has a point P inside itself. It is given that $AB=7\sqrt{2}, AP=3\sqrt{11}, \angle PAD=22.5°, \angle PBA=45°, \angle APD=67.5°, \angle PBC=\beta, \angle PAB=2\beta, \angle BPC=3\beta$. Let Q be the point of intersection of the bisectors of $\angle ADP$ and $\angle BCP$. Find the distance from Q to the line AB.

Solution (RUS). Согласно решению задачи №3 для 10 класса, биссектриса $\angle ADP$ и серединный перпендикуляр к стороне AB пересекаются в центре R окружности, описанной вокруг $\triangle ABP$; биссектриса угла BCP и серединный перпендикуляр к стороне AB пересекаются в центре R окружности, описанной вокруг треугольника ABP.
Следовательно, биссектрисы углов ADP и BCP пересекаются в точке R. Согласно решению задачи №3 для 10 класса, расстояние от AB до точки пересечения биссектрис углов ADP и BCP равно $\frac{\sqrt{AP^2-AB^2\sin^2(\angle PBA)}}{2\sin(\angle PBA)}$.

Solution (ENG). From solution of task 3 for 10-th grade we have:
bisectors of $\angle ADP$ and $\angle BCP$ and central perpendicular to AB intersect in R which is the center f a circle which $\triangle ABP$ is inscribed in;
Thus, the distance from AB to the point R equals to $\frac{\sqrt{AP^2 - AB^2 \sin^2(\angle PBA)}}{2\sin(\angle PBA)}$.

Answer: 5

Task 4. Многочлен $P(x) = x^4 + ax^3 + 6x^2 + cx + 1$ имеет четыре вещественных корня: x_1, x_2, x_3, x_4. Найти наименьшее возможное значение выражения $(x_1^2+1)(x_2^2+1)(x_3^2+1)(x_4^2+1)$.

The polynom $P(x) = x^4 + ax^3 + 6x^2 + cx + 1$ has four real roots: x_1, x_2, x_3, x_4. Find smallest possible value of $(x_1^2+1)(x_2^2+1)(x_3^2+1)(x_4^2+1)$.

Solution (RUS). Запишем многочлен $P(x)$ в виде $P(x) = (x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)(x-x_4)$. Заметим, что

$$(x_1^2+1)(x_2^2+1)(x_3^2+1)(x_4^2+1) = P(i)P(-i) = |P(i)|^2 = |(1-6+1)^2 + i(c-a)|^2 = 16 + (c-a)^2 \geqslant 16$$

равенство достигается при $P(x) = (x-1)^4$.

Solution (ENG). $P(x) = (x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)(x-x_4)$. Note that

$$(x_1^2+1)(x_2^2+1)(x_3^2+1)(x_4^2+1) = P(i)P(-i) = |P(i)|^2 = |(1-6+1)^2 + i\cdot(c-a)|^2 = 16 + (c-a)^2 \geqslant 16$$

and we have the equality for $P(x) = (x-1)^4$.

Answer: 16

Task 5. Дан 80-угольник $A_1A_2 \dots A_{80}$, такой, что сумма длин четных сторон не равна сумме длин нечетных сторон (то есть $A_1A_2 + A_3A_4 + \dots + A_{79}A_{80} \neq A_2A_3 + A_4A_5 + \dots + A_{80}A_1$). Докажите, что не существует такой бесконечной последовательности точек $X_0, X_1, X_2, \dots$ на сторонах этого многоугольника, что точка X_0 лежит на стороне $A_{80}A_1$ и для любого целого $k \geq 0$ точка X_{80k+1} лежит на стороне A_1A_2, точка X_{80k+2} – на стороне $A_2A_3, \dots$, точка $X_{80(k+1)}$ – на стороне $A_{80}A_1$, причем $A_1X_{80k} = A_1X_{80k+1}, A_2X_{80k+1} = A_2X_{80k+2}, ..., A_{80}X_{80k+79} = A_{80}X_{80(k+1)}$.

There is a polygon $A_1A_2 \dots A_{80}$ such that sum of its odd-numbered sides is not equal to sum of even-numbered sides ($A_1A_2 + A_3A_4 + \dots + A_{79}A_{80} \neq A_2A_3 + A_4A_5 + \dots + A_{80}A_1$). Prove that it's impossible to construct an infinite sequence $X_0, X_1, X_2, \dots$ of points on sides of the polygon (point X_0 lies on $A_{80}A_1$ and for every non-negative integer k point X_{80k+1} lies on A_1A_2, point X_{80k+2} lies on $A_2A_3, \dots$, point $X_{80(k+1)}$ lies on $A_{80}A_1$) such that $A_1X_{80k} = A_1X_{80k+1}, A_2X_{80k+1} = A_2X_{80k+2}, ..., A_{80}X_{80k+79} = A_{80}X_{80(k+1)}$.

Solution (RUS). Пусть последовательность $X_0, X_1, X_2, \dots$, построенная по описанным правилам, существует. Аналогично задаче №5 для 7-9 классов, получим

$$|A_0X_{2m}| = (\Sigma_{i=1}^{i=m} a_{2i} - \Sigma_{i=1}^{i=m} a_{2i-1} + x),$$

$$|A_0X_{4m}| = (\Sigma_{i=1}^{i=m} a_{2i} - \Sigma_{i=1}^{i=m} a_{2i-1} + |A_0X_{2m}|) = (2(\Sigma_{i=1}^{i=m} a_{2i} - \Sigma_{i=1}^{i=m} a_{2i-1}) + x),$$

$$\dots$$

$$|A_0X_{km}| = (k(\Sigma_{i=1}^{i=m} a_{2i} - \Sigma_{i=1}^{i=m} a_{2i-1}) + x)k \geq 0,$$

$$\dots$$

Поскольку $\Sigma_{i=1}^{i=m} a_{2i} \neq \Sigma_{i=1}^{i=m} a_{2i-1}$, имеем $|k(\Sigma_{i=1}^{i=m} a_{2i} - \Sigma_{i=1}^{i=m} a_{2i-1}) + x| > |A_0A_{2m}|$ для $k \geq 0$, то есть точка X_{km} лежит вне стороны A_0A_{2m} – противоречие с предположением, что все точки последовательности лежат на сторонах многоугольника. Такми образом, описанной последовательности $X_0, X_1, X_2, \dots$ не существует.

Solution (ENG). Let's suppose that there exists an infinite seqence $X_0, X_1, X_2, \dots$ which is built as described. Like in task 5 (7-9 degree) we get

$$|A_0X_{2m}| = (\Sigma_{i=1}^{i=m} a_{2i} - \Sigma_{i=1}^{i=m} a_{2i-1} + x),$$

$$|A_0X_{4m}| = (\Sigma_{i=1}^{i=m} a_{2i} - \Sigma_{i=1}^{i=m} a_{2i-1} + |A_0X_{2m}|) = (2(\Sigma_{i=1}^{i=m} a_{2i} - \Sigma_{i=1}^{i=m} a_{2i-1}) + x),$$

$$\dots$$

$$|A_0X_{km}| = (k(\Sigma_{i=1}^{i=m} a_{2i} - \Sigma_{i=1}^{i=m} a_{2i-1}) + x) with k \geq 0,$$

$$\dots$$

Because of $\Sigma_{i=1}^{i=m} a_{2i} \neq \Sigma_{i=1}^{i=m} a_{2i-1}$ we have $|k(\Sigma_{i=1}^{i=m} a_{2i} - \Sigma_{i=1}^{i=m} a_{2i-1}) + x| > |A_0A_{2m}|$ for some $k \geq 0$, so the point X_{km} lies outside of the side A_0A_{2m} which contradicts with our assumption. Thus, there is no infinite sequence $X_0, X_1, X_2, \dots$ built by the rules.

Task 6. В школьном классе сидели 10 учеников, каждому из которых присвоен номер (натуральное число от 1 до 10), все номера при этом различны. Учитель случайным образом раздал каждому ученику по одной карточке, на которой написано натуральное число от 1 до 10 (числа на всех карточках также различны). Далее начинается игра по следующим правилам: любые два ученика могут обменяться своими карточками, но лишь один раз (второй прямой обмен между этими же учениками запрещен), затем другая пара и т.д. Цель игры - добиться того, чтобы номер каждого ученика совпадал с номером его карточки. Всегда ли такой исход достижим? Если нет, то учитель может пригласить в класс дополнительно n учеников, раздать им номера с 11 по $(10+n)$-й и карточки с соответствующими им номерами. При каком наименьшем n цель игры может быть гарантированно достигнута при любом начальном распределении карточек?
Ученики получают карточки открыто, их номера известны всем

There are 10 students in a classroom, each of them was assigned a number (an integer from 1 to 10) with all the numbers are different. The teacher randomly distributed one card (with an integer from 1 to 10 written on it) to each student with the numbers on the cards are also different. Then the following game starts: any two students can exchange their cards, but only once (the second direct exchange between the same pair of students is prohibited), then another pair, etc. The goal of the game is to ensure that the number of each student matches the number of his card. Is such an outcome possible? If not, the teacher can invite an additional n students to the classroom and give them numbers from 11 to $10 + n$ and cards corresponding to their numbers. What is the smallest n such that the goal of the game can be guaranteed to be achieved for any initial conditions?
All students know number written on each other's card

Solution (RUS). Изобразим данные в условии задачи в виде ориентированного графа, вершины которого - пары натуральных чисел (i, b_i) для всех натуральных $1 \leq i \leq 10$, в которых i –

номер ученика, а b_i – число, написанное на его карточке. Ребра графа будут соединять пары вида (x, y) и (y, z), направим их от пары (x, y) к паре (y, z). Очевидно, степень каждой вершины равна 2, поскольку ровно одно ребро из нее выходит и одно ребро – входит (исключения - вершины с т.н. петлями, которые соответствуют ученикам, чей номер совпадает с числом, написанным на их же карточке – в худшем случае таких вершин не будет вовсе). Построенный граф распадается на циклы. Докажем, что даже в худшем случае (когда в графе нет петель и цикл всего один) мы можем путем обмена карточками (причем не более одного раза в пределах любой пары учеников) добиться совпадения номеров каждого ученика с числом на его карточке.
Выберем один из циклов: пусть он содержит k учеников с номерами i_1,...i_k, расположенными в цикле последовательно, начиная с произвольно выбранного i_1. Теперь будем совершать обмены карточками в "обратном"порядке: i_k-й с i_{k-1}-м, потом i_{k-1}-й с i_{k-2}-м, затем i_{k-2}-й с i_{k-3}-м, ..., i_2-го с i_1-м и, наконец, i_1-го ученика с i_k-м. Теперь внутри этого цикла каждый ученик имеет на руках карточку с соответствующим ему номером. Повторяя процедуру для остальных циклов, добьемся желаемого результата – все ученики будут с соответствующими их номерам карточками.

Solution (ENG). We represent the data in the problem statement in the form of a directed graph, which vertices are pairs (i, b_i) of positive integers for all positive integers $1 \leq i \leq 10$. Here i is the student's number, and b_i is the number written on his card. The edges of the graph will connect pairs of the form (x, y) and (y, z) directed from the pair (x, y) to the pair (y, z). Obviously, the degree of each vertex is 2, since exactly one edge leaves it and one edge enters it (the exceptions are so-called loops, which correspond to students whose number coincides with the number written on their own card). The constructed graph decomposes into cycles. Let us prove that even in the worst case (when there are no loops in the graph and there is only one cycle), we can achieve the coincidence of the numbers of each student with the number on his card by exchanging cards (and not more than once within any pair of students).
Let's choose one of the cycles: let it contain k students with numbers i_1, ... i_k, located in the cycle sequentially, starting from an arbitrarily chosen i_1. Now we will exchange cards in the "reverse"order: i_k-th with i_{k-1}-th, then i_{k-1}-th with i_{k-2}-th , then i_{k-2}-th with i_{k-3}-th, ..., i_2-nd with i_1-st and, finally, i_1-st student with i_k-th. Now each student inside this cycle has a card with the corresponding number in his hands. Repeating the procedure for the remaining cycles, we will achieve the desired result – all students will be with cards corresponding to their numbers.

Финал
Final

7-9 класс. Разбор задач
7-9 degree. Solution of tasks

Task 7. В 101-значной десятичной записи числа n используются 11 единиц с равным количеством нулей между ними (других цифр в записи нет).
Найдите сумму цифр десятичной записи числа n^2.

The 101-digits decimal notation of n uses 11 digits «1» with an equal number of zeros between them (there are no other digits in the notation).
Find the sum of the decimal digits of n^2.

Solution (RUS). Представим n в виде

$$1 + 10^{10} + 10^{20} + \cdots + 10^{100} = \sum_{k=0}^{10} 10^{10k}$$

$$n^2 = (\sum_{k=0}^{10} 10^{10k})^2 = \sum_{k=0}^{10} 10^{20k} + \sum_{0 \le i,j \le 10} 10^{10(i+j)}$$

В разрядах, номера которых не кратны 10, будут стоять нули (за исключением, возможно, некоторых, в которых будут стоять единицы, что мы и увидим далее).
Очевидно, в нулевом разряде числа n^2 будет стоять единица. Слагаемые, соответствующие $i > 1$, никак не повлияют на цифру, стоящую в 10-м разряде. Аналогично, слагаемые, соответствующие $i > m$ для всякого натурального $m < 10$, не повлияют на цифру, стоящую в $10m$-м разряде.
Осталось подсчитать, сколько слагаемых соответствуют всяким $i \le m$ для каждого из этих m. Нетрудно убедиться, что в 10-м разряде будет стоять цифра 2, в 20-м – цифра 3 и т.д. до 90-го разряда, соответствующего $m = 9$, поскольку число 9 представляется в виде суммы двух целых неотрицательных чисел $(i + j)$ 10 способами – значит, в 90-м разряде будет стоять ноль, а в 91-м – единица. Аналогично, в 100-м разряде будет стоять единица, как и в 101-м, потому что число 10 представимо в виде $(i + j)$ 11 способами (i, j – целые неотрицательные числа).
Осталось представить каждое из натуральных чисел от 11 до 20 в виде суммы двух целых неотрицательных чисел, не превосходящих 10.
Итак, сумма цифр числа n^2 равна $1 + 2 + 3 + \cdots + 9 + 1 + 1 + 1 + 1 + 9 + 8 + 7 + \cdots + 2 + 1 = 2 \cdot (1 + \cdots + 9) + 4 = 94$.

Solution (ENG). Let's represent n as

$$1 + 10^{10} + 10^{20} + \cdots + 10^{100} = \sum_{k=0}^{10} 10^{10k}$$

$$n^2 = (\sum_{k=0}^{10} 10^{10k})^2 = \sum_{k=0}^{10} 10^{20k} + \sum_{0 \le i,j \le 10} 10^{10(i+j)}$$

The digits which numbers are not multiples of 10, will contain zeros (except, perhaps, some which we will see later).
Obviously, the zero position of the number n^2 will contain one. The terms corresponding to $i > 1$ will not affect the 10th digit in any way. Similarly, the terms corresponding to $i > m$ for any positive integer $m < 10$ will not affect the digit in the $10m$-th position.
It remains to calculate how many terms correspond to each $i \le m$ for each of these m. It is easy to make sure that the 10th digit will contain digit 2, the 20th – digit 3, etc. up to the 90th position, corresponding to $m = 9$, since the number 9 is represented as a sum of two non-negative integers $(i + j)$ in 10 ways – that means that in the 90th position there will be zero, and in 91-st there will be digit «1». Similarly, in the 100th position there will be «1», as in the 101st, because the number 10 can be represented as $(i + j)$ in 11 ways (i, j are non-negative integers).
It remains to represent each of the integers from 11 to 20 as a sum of two non-negative integers not exceeding 10.
So, the sum of the digits of the number n^2 is equal to $1+2+3+\cdots+9+1+1+1+1+9+8+7+\cdots+2+1 = 2 \cdot (1 + \cdots + 9) + 4 = 94$.

Answer: 94

Task 8. *Профессор О.М.Киселев предлагает вам решить следующую задачу:*
Числовые ряды использовались в математике на протяжении всей истории науки, и вопросы суммируемости рядов возникали с античных времен. Для сходящихся рядов сумма их слагаемых – число. Для расходящихся рядов сумма всех слагаемых либо неограничена, либо не определена. Однако, расходящиеся ряды оказываются полезными как в теоретических построениях, так и в прямых вычислениях.

В XVIII веке Леонард Эйлер рассматривал расходящиеся ряды не как сумму их слагаемых, а как формальное выражение, возникшее из какой-либо функциональной зависимости и позволяющее исследовать свойства такой зависимости. В конце XIX века Анри Пуанкаре дал определение асимптотического (вообще говоря, расходящегося) ряда и показал, как строго обосновать использование таких рядов в небесной механике. В самом начале XX века Эмиль Борель ввел одно из наиболее общих определений для расходящихся рядов. Теперь такие ряды широко используются в современной математической физике: например, в задачах квантовой механики.

Примем, что сумма числового ряда $s = \sum_{n=0}^{\infty} a_n$ удовлетворяет следующим равенствам:

1. $s = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n$.
2. $\sum_{n=0}^{\infty} \lambda a_n = \lambda s, \quad \lambda \in \mathbb{R}$.
3. $s = \sum_{n=0}^{\infty} a_n, \quad t = \sum_{n=0}^{\infty} b_n, \quad => s + t = \sum_{n=0}^{\infty}(a_n + b_n)$.

Рассмотрим ряд

$$\sum_{n=0}^{\infty}(2^n - 4^n + 8^n - 16^n + \cdots + (-1)^{p+1} \cdot 2^{pn})$$

Здесь $p > 1$ – натуральное число.
Докажите, что сумма по Борелю S этого ряда удовлетворяет неравенству $S > -1$.

Professor O.Kiselev suggests you the following problem:
Numerical series have been used in mathematics throughout the history of science, and questions of the summability of series have arisen since ancient times. For converging series, the sum of their terms is a number. For diverging series, the sum of all terms is either unlimited or undefined. However, divergent series prove to be useful both in theoretical constructions and in direct calculations.

In the 18th century, Leonard Euler considered divergent series not as a sum of their terms, but as a formal expression that arose from some functional dependence and allows one to study the properties of such a dependence. At the end of the 19th century, Henri Poincaré gave a definition of an asymptotic (generally speaking, divergent) series and showed how to rigorously substantiate the use of such series in celestial mechanics. At the very beginning of the 20th century, Emil Borel introduced one of the most general definitions for diverging series. Now such series are widely used in modern mathematical physics: for example, in problems of quantum mechanics.

Let us assume that the sum of the numerical series $s = \sum_{n=0}^{\infty} a_n$ satisfies the following equalities:

1. $s = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n$.
2. $\sum_{n=0}^{\infty} \lambda a_n = \lambda s, \quad \lambda \in \mathbb{R}$.
3. $s = \sum_{n=0}^{\infty} a_n, \quad t = \sum_{n=0}^{\infty} b_n, \quad => s + t = \sum_{n=0}^{\infty}(a_n + b_n)$.

Consider the series

$$\sum_{n=0}^{\infty}(2^n - 4^n + 8^n - 16^n + \cdots + (-1)^{p+1} \cdot 2^{pn})$$

Here $p > 1$ is an integer.
Prove that the Borel sum S of the series satisfies the inequality $S > -1$.

Solution (RUS). Воспользовавшись определением суммы по Борелю, найдем

$$\sum_{n=0}^{\infty}(2^n - 4^n + 8^n - 16^n + \cdots + (-1)^{p+1} \cdot 2^{pn}) = \sum_{n=0}^{\infty} 2^n - \sum_{n=0}^{\infty} 4^n + \sum_{n=0}^{\infty} 8^n + \cdots + (-1)^{p+1} \sum_{n=0}^{\infty} 2^{pn}$$

Вычислим

$$S_k = \sum_{n=0}^{\infty} 2^{kn} = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} 2^{kn} = 1 + 2^k \sum_{n=1}^{\infty} 2^{k(n-1)} = 1 + 2^k \sum_{n=0}^{\infty} 2^{kn} = 1 + 2^k S_k,$$

откуда $S_k = \frac{1}{1-2^k}$ для всякого натурального k. Таким образом, $S_1 = -1, S_2 = -\frac{1}{3}, S_3 = -\frac{1}{7}$ и т.д.
Оценим требуемую **конечную** сумму S, представив ее в виде

$$S = S_1 - S_2 + S_3 - \cdots + (-1)^{p+1} S_p = S_1 + (S_3 - S_2) + (S_5 - S_4) + \cdots$$

В этой сумме в каждой скобке разность положительна. Возможно, без пары останется S_p, тогда можно прибавить ее с соответствующим знаком к первой скобке – она по-прежнему будет положительна для любого $p > 3$. Случаи с $p \leq 3$ легко перебираются вручную.
Таким образом, $S > -1$.

Solution (ENG). Using the Borel's definition of a sum, we find

$$\sum_{n=0}^{\infty}(2^n - 4^n + 8^n - 16^n + \cdots + (-1)^{p+1} \cdot 2^{pn}) = \sum_{n=0}^{\infty} 2^n - \sum_{n=0}^{\infty} 4^n + \sum_{n=0}^{\infty} 8^n + \cdots + (-1)^{p+1} \sum_{n=0}^{\infty} 2^{pn}$$

$$S_k = \sum_{n=0}^{\infty} 2^{kn} = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} 2^{kn} = 1 + 2^k \sum_{n=1}^{\infty} 2^{k(n-1)} = 1 + 2^k \sum_{n=0}^{\infty} 2^{kn} = 1 + 2^k S_k,$$

whence $S_k = \frac{1}{1-2^k}$ for any positive integer k. So, $S_1 = -1, S_2 = -\frac{1}{3}, S_3 = -\frac{1}{7}$, etc.
Let us estimate the required **finite** sum of S representing it as

$$S = S_1 - S_2 + S_3 - \cdots + (-1)^{p+1} S_p = S_1 + (S_3 - S_2) + (S_5 - S_4) + \cdots$$

The difference from each parenthesis is positive. Perhaps, S_p will remain without a pair, then you can add it with the appropriate sign to the first parenthesis – it will still be positive for any $p > 3$. Cases with $p \leq 3$ are easy to iterate over by hand.
Thus, $S > -1$.

Task 9. На координатной плоскости в точках $(0, 0)$ и $(2m+1, 0)$ размещены два робота, размерами которых можно пренебречь.
Каждую секунду каждый робот перемещается на вектор длины 1 в одном из двух направлений, случайно выбираемом в начале каждой секунды: первый робот перемещается либо на вектор $(1, 0)$, либо на вектор $(0, 1)$, а второй робот (тот, что начинает движение из точки $(2m + 1, 0)$) – либо на вектор $(-1, 0)$, либо на вектор $(0, 1)$. Также им запрещается выезжать за пределы прямоугольника, стороны которого лежат на прямых $x = 0, y = 0, x = 2m + 1, y = n$ (m и n - натуральные числа).
Если робот не может двигаться ни в одном из разрешенных направлений, он выключается. Если два робота одновременно оказались в одной точке, они сталкиваются и ломаются.
Найдите вероятность того, что роботы НЕ сломаются до того, как оба выключатся.

On the coordinate plane there are two non-dimensional robots at the points $(0, 0)$ and $(2m + 1, 0)$.
Every second each robot moves a vector of length 1 in one of two directions, randomly chosen at the beginning of each second: the first robot moves either by the vector $(1, 0)$ or by the vector $(0, 1)$, and the second robot (the one that starts from the point $(2m + 1, 0)$) moves either by the vector $(-1, 0)$ or by the vector $(0, 1)$. They are also prohibited from leaving the rectangle which sides lie on the lines $x = 0, y = 0, x = 2m + 1, y = n$ (m and n are some positive integers).
If the robot cannot move in any of the permitted directions, it turns off. If two robots are in the same point at the same time, they collide and break.
Find the probability that the robots will NOT break before both shut down.

Solution (RUS). Найдем вероятность того, что роботы столкнутся. Это событие (если оно случится) произойдет на прямой $x = m + 0.5$, иначе пути роботов будут различны.
Вычислим вероятность того, что роботы столкнутся в точке с координатами $(m + 0.5, q)$, где $0 \leq q \leq n$ – целое число. Для этого сначала найдем вероятность P_q того, что робот пройдет m шагов вдоль оси x и q шагов вдоль оси y: $P_q = \frac{C_{m+q}^q}{2^{m+q}}$, если $q < n$, и $P_q = \frac{\sum_{k=n}^{m+n} C_{m+n}^k}{2^{m+n}}$ для $q = n$,

поскольку робот успел выполнить $m+q$ единичных передвижений, из которых q – вдоль оси y. Здесь $C_{m+q}^q = \frac{(m+q)!}{m!\cdot q!}$ – число сочетаний, т.е. количество способов выбрать q элементов из $m+q$.
Если роботы столкнулись в точке $(m+0.5, q)$, то они оказались соответственно в точках (m, q) и $(m+1, q)$ – вероятность этого равна P_q^2. Тогда вероятность того, что роботы столкнутся в точке $(m+0.5, q)$, равна $p_q = P_q^2 \cdot (\frac{1}{2})^2$ (роботы выбрали встречные направления движения) для $q < n$ и равна $p_n = P_n^2$ для $q = n$.
Вероятность того, что роботы столкнутся, равна $\sum_{q=0}^{n} p_q$. Значит, искомая вероятность равна

$$1 - \sum_{q=0}^{n} p_q$$

, где p_q – вероятность, определенная ранее.

Solution (ENG). Let's find the probability that the robots will collide. This event (if it happens) will occur on the line $x = m + 0.5$, otherwise the paths of the robots will be of different lengths.
Let's calculate the probability that robots will collide at a point with coordinates $(m+0.5, q)$, where $0 \le q \le n$ is an integer. To do this, we find the probability P_q that the robot will take m steps along the x axis and q steps along the y axis: $P_q = \frac{C_{m+q}^q}{2^{m+q}}$, if $q < n$, and $P_q = \frac{\sum_{k=n}^{m+n} C_{m+n}^k}{2^{m+n}}$ for $q = n$, since the robot managed to perform $m+q$ unit movements, of which q is along the y axis. Here $C_{m+q}^q = \frac{(m+q)!}{m!\cdot q!}$ is the number of combinations, i.e. the number of ways to select q elements from $m+q$.
If the robots collide at point $(m+0.5, q)$, then they moved there from points (m, q) and $(m+1, q)$, respectively – the probability of that is P_q^2. Thus, the probability is equal to $p_q = P_q^2 \cdot (\frac{1}{2})^2$ (for them to choose opposite directions) for $q < n$ and $p_n = P_n^2$ for $q = n$.
The probability that robots will collide is $\sum_{q=0}^{n} p_q$. So, the probability asked in the problem is equal to

$$1 - \sum_{q=0}^{n} p_q$$

, where p_q is the probability determined earlier.

Task 10. *П.В.Бибиков, тренер сборной Москвы на Всероссийской олимпиаде школьников по математике, предлагает вам решить следующую задачу:*
Дан клетчатый прямоугольник $2m \times 2n$, разбитый произвольным образом на доминошки 2×1. Если две доминошки образуют квадрат 2×2, разрешается повернуть их обе на $90°$ (сделать *флип*). Наша цель — последовательностью флипов сделать все доминошки горизонтальными (*кирпичная кладка*) за как можно меньшее количество операций.
Раскрасим наш прямоугольник в шахматную раскраску, считая левый нижний угол черным. Направим по сторонам квадратиков стрелочки так, чтобы черные квадратики обходились бы против часовой стрелки, а белые — по часовой стрелке.
Пусть нам дано некоторое замощение прямоугольника доминошками, которое мы обозначим через T. Сопоставим замощению его *функцию высоты* — это будет функция на вершинах клеток нашего прямоугольника, которую мы будем обозначать $H_T(v)$. Определим ее следующим образом. Выберем левую нижнюю вершину v_0 прямоугольника и положим ее высоту равной нулю; далее, каждую вершину v соединим с v_0 путем, который проходит по линиям сетки и не пересекает доминошек. Этот путь состоит из стрелок, каждая из которых проходится либо в попутном направлении (т. е. сонаправлена с путем), либо в противоположном. Положим высоту $H_T(v)$ равной разности числа попутных и противоположно направленных стрелок.

1) Докажите, что так определенное значение функции высоты $H_T(v)$ не зависит от выбора пути, соединяющего v_0 с v.
2) Назовем *кирпичной кладкой* разбиение $T_{\min}$, в котором все доминошки горизонтальны. Назовем *приведенной высотой разбиения* T величину

$$h_T(v) = \frac{|H_T(v) - H_{T_{\min}}(v)|}{4}.$$

Как меняется приведенная высота разбиения при совершении одного флипа?

P.Bibikov, coach of the Moscow team at the All-Russian Olympiad in mathematics, suggests you the following problem:
There is a checkered rectangle $2m \times 2n$ given, arbitrarily divided into rectangles 2×1 («dominoes»). If two dominoes form a 2×2 square, it is allowed to rotate them both by $90°$ (make a *flip*). Our goal is to make all dominoes horizontal (*brickwork*) by a sequence of flips in as few operations as possible.
Let's color our rectangle in a chessboard color, assuming the bottom left corner to be black. Let's draw the arrows along the sides of the squares so that the black squares go counterclockwise, and the white ones go clockwise.
Let us be given some tiling of a rectangle with dominoes, which we denote by T. Let us associate the tiling with its *height function* – it will be the function at the vertices of the cells of our rectangle, which we will denote by $H_T(v)$. We define it as follows. Select the lower left vertex of the v_0 rectangle and set its height to zero; further, each vertex v is connected to v_0 by a path that passes along the grid lines and does not intersect the dominoes. This path consists of arrows, each of which is traversed either in the same direction (i.e., co-directed with the path), or in the opposite direction. Let the height of $H_T(v)$ be equal to the difference in the number of trailing and oppositely directed arrows.

1) Prove that the so-defined value of the height function $H_T(v)$ does not depend on the choice of the path connecting v_0 with v.
2) Let's call *brickwork* the partition $T_{\,min}$ in which all dominoes are horizontal. We call *the reduced height of the partition* T the value

$$h_T(v) = \frac{|H_T(v) - H_{T_{\min}}(v)|}{4}.$$

How does the reduced split height change after one flip?

Solution (RUS). 1) Рассмотрим два пути γ_1 и γ_2, соединяющие v_0 с v, и обозначим для любого пути γ через I_γ разницу количества попутных и противопутных стрелок при проходе вдоль него. Докажем, что значения функции высоты в v, построенные по путям γ_1 и γ_2, равны — иными словами, что $I_{\gamma_1} = I_{\gamma_2}$. Для этого рассмотрим замкнутый контур γ_3, получающийся, если мы сначала пройдем от v_0 к v по первому пути, а потом вернемся из v в v_0 вдоль второго, проходя его в обратном направлении. При прохождении пути в обратном направлении вклад каждой стрелки изменяет знак, поэтому $I_{\gamma_3} = I_{\gamma_1} - I_{\gamma_2}$, и мы хотим доказать, что $I_{\gamma_3} = 0$.

На самом деле, мы докажем, что для любого замкнутого пути γ верно равенство $I_\gamma = 0$. Для этого сначала разрежем наш путь на несколько простых (т.е. несамопересекающихся) замкнутых путей (при необходимости удалив все стрелки, которые проходятся дважды в противоположных направлениях). Легко видеть, что достаточно доказать наше утверждение для несамопересекающегося контура.

Без ограничения общности предположим, что наш контур γ обходится против часовой стрелки. Рассмотрим доминошки, лежащие внутри контура, и пусть $\gamma_1', \ldots, \gamma_n'$ — замкнутые пути, отвечающие обходу их границ против часовой стрелки. Заметим, что тогда $I_\gamma = I_{\gamma_1'} + \ldots + I_{\gamma_n'}$. Действительно, ребра, составляющие контур γ, будут в правой части посчитаны ровно один раз, а лежащие внутри него будут посчитаны дважды с противоположными знаками и поэтому сократятся. Но на границе любой доминошки три стрелки идут по часовой, а три против часовой стрелки, поэтому все слагаемые $I_{\gamma_j'}$ равны нулю, что и требовалось доказать.
2) Рассмотрим квадрат 2×2, в котором две вертикальные доминошки операцией флипа перешли в две горизонтальные. Для определенности пусть левый нижний угол у квадрата черный (случай белого углового квадрата рассматривается аналогично). Тогда легко видеть, что высоты всех точек, кроме центральной, остались неизменными, а высота центральной точки изменилась на 4. Таким образом, приведенная высота точки не меняется, если относительно этой точки флип не совершался, и изменяется на 1, если флип был совершен.

Solution (ENG). 1) Consider two paths γ_1 and γ_2 connecting v_0 with v, and denote for any path γ by I_γ the difference in the number of upstream and downstream arrows when passing along it. Let's prove that the values of the height function in v, constructed along the paths γ_1 and γ_2, are equal – in other words, that $I_{\gamma_1} = I_{\gamma_2}$. To do this, consider the closed contour γ_3, obtained if we first go from v_0 to v along the first path, and then return from v to v_0 along the second, passing it in the opposite direction. When traveling in the opposite direction, the contribution of each arrow changes sign, therefore $I_{\gamma_3} = I_{\gamma_1} - I_{\gamma_2}$, and we want to prove that $I_{\gamma_3} = 0$.

In fact, we will prove that for any closed path γ the equality $I_\gamma = 0$ is true. To do this, we first cut our path into several simple (i.e., non-self-intersecting) closed paths (if necessary, remove all arrows that are traversed twice in opposite directions). It is easy to see that it is enough to prove our statement for a non-self-intersecting contour.

Without loss of generality, suppose that our contour γ traverses counterclockwise. Consider dominoes lying inside the contour, and let $\gamma'_1, \ldots, \gamma'_n$ be closed paths corresponding to traversing their boundaries counterclockwise. Note that then $I_\gamma = I_{\gamma'_1} + \ldots + I_{\gamma'_n}$. Indeed, the edges that make up the γ contour will be counted exactly once on the right side, and the edges lying inside it will be counted twice with opposite signs and therefore will be canceled. But on the boundary of any domino, three arrows go clockwise, and three counterclockwise, so all the terms $I_{\gamma'_j}$ are equal to zero, which is what was required to prove.

2) Consider a square 2×2, in which two vertical dominoes flip turned into two horizontal ones. For definiteness, let the lower left corner of the square be black (the case of a white corner square is considered similarly). Then it is easy to see that the heights of all points, except the central one, remained unchanged, and the height of the central point changed by 4. Thus, the reduced height of the point does not change if the flip was not performed relative to this point, and changes by 1 if the flip was performed.

10 класс. Разбор задач
10th degree. Solution of tasks

Task 1. Решите уравнение

$$\sqrt{x\sqrt[4]{x\sqrt{x\sqrt[4]{\ldots}}}} = 1024$$

Solve for x:

$$\sqrt{x\sqrt[4]{x\sqrt{x\sqrt[4]{\ldots}}}} = 1024$$

Solution (RUS). Представим уравнение в виде $\sqrt{x\sqrt[4]{x \cdot 1024}} = 1024$ ввиду бесконечной вложенности радикалов.

$$x\sqrt[4]{x \cdot 2^{10}} = 2^{20}$$

$$x^{5/4} \cdot 2^{5/2} = 2^{20}$$

$$x^{5/4} = 2^{35/2}$$

$$x = 2^{14} = 16384$$

Solution (ENG). We represent the equation in the form $\sqrt{x\sqrt[4]{x \cdot 1024}} = 1024$ due to infinite number of roots.

$$x\sqrt[4]{x \cdot 2^{10}} = 2^{20}$$

$$x^{5/4} \cdot 2^{5/2} = 2^{20}$$

$$x^{5/4} = 2^{35/2}$$

$$x = 2^{14} = 16384$$

Answer: 16384

Task 2. Дана точка A_0 координатной плоскости. Строится последовательность $\{A_k\}$ точек этой плоскости, такая, что для всякого натурального k точка A_k получается из A_{k-1} одним из следующих действий:
1) симметрией относительно прямой $x = 1$;
2) симметрией относительно прямой $y = 1$;
3) инверсией относительно окружности $x^2 + y^2 = 1$. В таком случае точка A_k лежит на луче с началом в точке O (начало координат), проходящем через точку A_{k-1}, причем $|OA_{k-1}| \cdot |OA_k| = 1$.

Найдите наименьшее n, при котором гарантированно удастся построить последовательность $\{A_k\}$ с условием, что расстояние от A_n до точки $(1, 1)$ не превосходит 10^{-3}.

There is a point A_0 given on the coordinate plane. A sequence $\{A_k\}$ of points of the plane is constructed such that for any positive integer k the point A_k is obtained from A_{k-1} by one of the following actions:
action 1) symmetry with respect to the line $x = 1$;
action 2) symmetry with respect to the line $y = 1$;
action 3) inversion with respect to the circle $x^2+y^2 = 1$. In this case, the point A_k lies on the ray with the origin at the point O(with coordinates of $(0, 0)$), passing through the point A_{k-1}, and $|OA_{k-1}|\cdot|OA_k| = 1$.

Find the smallest n that is guaranteed to be able to construct the sequence $\{A_k\}$ such that the distance from A_n to the point $(1, 1)$ does not exceed 10^{-3}.

Solution (RUS). Пусть точка A_0 имеет координаты (x_0, y_0) и (без ограничения общности) $x_0 \geq y_0$. Покажем, что при помощи n действий 1 и 3 можно добиться того, что $|x_n - 1| < 10^{-3}$. Для начала заметим, что, если хотя бы одна из координат точки A отрицательна, то можно операциями 1 и 2 (не более двух применений) сделать обе координаты положительными.
Преобразование 1 преобразует x_k в $2 - x_k$, а преобразование 2 – в $\frac{1}{x_k}$. Рассмотрим композицию (последовательное применение) преобразований 3 и 1 в указанном порядке: $x \mapsto \frac{1}{x} \mapsto 2 - \frac{1}{x} = \frac{2\cdot x-1}{1\cdot x-0}$. Назовем указанное преобразование f и покажем, что $f(\frac{(n+1)\cdot x-n}{n\cdot x-(n-1)}) = \frac{(n+2)\cdot x-(n+1)}{(n+1)\cdot x-n}$ для любого натурального n. Действительно,

$$f(\frac{(n+1)\cdot x - n}{n\cdot x - (n-1)}) = 2 - \frac{n\cdot x - (n-1)}{(n+1)\cdot x - n} = \frac{(n+2)\cdot x - (n+1)}{(n+1)\cdot x - n} = \frac{n+2}{n+1} - \frac{1}{(n+1)^2\cdot x - n(n+1)}$$

Если $0 < x < 1$, то сначала выполним преобразование 3, если $x \geq 2$, то выполним преобразование f. Если x изначально не равен 1, то ни одно из преобразований не переведет его в 1. Таким образом, можно считать, что $1 < x < 2$. При этом $|x - 1| = |\frac{1}{n+1} - \frac{1}{(n+1)^2\cdot x-n(n+1)}| < 10^{-3}$. Решая это неравенство, получим $n \geq 1000 - \frac{1}{x-1}$. Поскольку $x - 1$ положительно, за 1000 операций f мы гарантированно добьемся того, чтобы $|x_n - 1| < 10^{-3}$.
Заметим, что при выполнений операции 1 значение $|y_k-1|$ не изменяется, при операции 3 ордината точки меняется аналогично абсциссе. Введем преобразование h как композицию преобразований 3, 2 и 1 в указанном порядке. Очевидно, после n преобразований h ордината точки A_0 также не будет отличаться от единицы более, чем на $|\frac{1}{n+1} - \frac{1}{(n+1)^2\cdot x-n(n+1)}| < 10^{-3}$.
Итак, добиться выполнения требования задачи можно за не более чем 3005 операций. Из них первые две – операции 1 и 2 (чтобы добиться положительности координат), затем добиваемся того, чтобы обе координаты лежали в пределах от 1 до 2 (не более трех операций) и, наконец, 1000 применений преобразования h, каждое из которых включает 3 операции.

Solution (ENG). Let the point A_0 have coordinates (x_0, y_0) and (without loss of generality) $x_0 \geq y_0$. Let us show that with the help of n actions 1 and 3 it is possible to achieve that $|x_n-1| < 10^{-3}$. To begin with, note that if at least one of the coordinates of the point A is negative, then by operations

1 and 2 (no more than two applications), both coordinates can be made positive.
Action 1 converts x_k to $2-x_k$ and action 2 converts x_k to $\frac{1}{x_k}$. Consider the composition (sequential application) of actions 3 and 1 in the indicated order: $x \mapsto \frac{1}{x} \mapsto 2-\frac{1}{x} = \frac{2\cdot x-1}{1\cdot x-0}$. We call the indicated transformation f and show that $f(\frac{(n+1)\cdot xn}{n\cdot x-(n-1)}) = \frac{(n+2)\cdot x-(n+1)}{(n+1)\cdot xn}$ for any positive integer n. Indeed,

$$f(\frac{(n+1)\cdot xn}{n\cdot x-(n-1)}) = 2-\frac{n\cdot x-(n-1)}{(n+1)\cdot xn} = \frac{(n+2)\cdot x-(n+1)}{(n+1)\cdot xn} = \frac{n+2}{n+1}-\frac{1}{(n+1)^2\cdot xn(n+1)}$$

If $0<x<1$, then first we perform action 3, if $x \geq 2$, then we perform the transformation f. If x is not initially equal to 1, then none of the transformations will convert it to 1. Thus, we can assume that $1<x<2$. Moreover, $|x-1| = |\frac{1}{n+1}-\frac{1}{(n+1)^2\cdot x-n(n+1)}| < 10^{-3}$. Solving this inequality, we get $n \geq 1000-\frac{1}{x-1}$. Since $x-1$ is positive, for 1000 operations f we are guaranteed to achieve that $|x_n-1|<10^{-3}$.
Note that when action 1 is performed, the value of $|y_k-1|$ does not change; during action 3, the ordinate of the point changes similarly to the abscissa. Let us introduce transformation h as a composition of actions 3, 2 and 1 in the indicated order. Obviously, after n transformations of type h the ordinate of the point A_0 will also not differ from 1 by more than $|\frac{1}{n+1}-\frac{1}{(n+1)^2\cdot x-n(n+1)}| < 10^{-3}$.
So, it is possible to achieve the problem requirements for no more than 3005 of actions. Of these, the first two are actions 1 and 2 (to achieve the positivity of the coordinates), then we ensure that both coordinates lie in the range from 1 to 2 (no more than three actions) and, finally, 1000 of the transformation of type h, each of them including 3 actions.

Answer: 3005

Task 3. *П.В.Бибиков, тренер сборной Москвы на Всероссийской олимпиаде школьников по математике, предлагает вам решить следующую задачу:*
Дан клетчатый прямоугольник $2m \times 2n$, разбитый произвольным образом на доминошки 2×1. Если две доминошки образуют квадрат 2×2, разрешается повернуть их обе на $90°$ (сделать *флип*). Наша цель — последовательностью флипов сделать все доминошки горизонтальными (*кирпичная кладка*) за как можно меньшее количество операций.
Раскрасим наш прямоугольник в шахматную раскраску, считая левый нижний угол черным. Направим по сторонам квадратиков стрелочки так, чтобы черные квадратики обходились бы против часовой стрелки, а белые — по часовой стрелке.
Пусть нам дано некоторое замощение прямоугольника доминошками, которое мы обозначим через T. Сопоставим замощению его *функцию высоты* — это будет функция на вершинах клеток нашего прямоугольника, которую мы будем обозначать $H_T(v)$. Определим ее следующим образом. Выберем левую нижнюю вершину v_0 прямоугольника и положим ее высоту равной нулю; далее, каждую вершину v соединим с v_0 путем, который проходит по линиям сетки и не пересекает доминошек. Этот путь состоит из стрелок, каждая из которых проходится либо в попутном направлении (т. е. сонаправлена с путем), либо в противоположном. Положим высоту $H_T(v)$ равной разности числа попутных и противоположно направленных стрелок.

Пусть $H(v)$ — функция на вершинах графа G, удовлетворяющая следующему свойству: для любых соседних вершин u и v, ребро между которыми направлено от u к v, либо $H(v)=H(u)+1$, либо $H(v)=H(u)-3$. Докажите, что $H(v)$ является функцией высоты единственного замощения T.

P.Bibikov, coach of the Moscow team at the All-Russian Olympiad in mathematics, suggests you the following problem:
There is a checkered rectangle $2m\times 2n$ given, arbitrarily divided into rectangles 2×1 («dominoes»). If two dominoes form a 2×2 square, it is allowed to rotate them both by $90°$ (make a *flip*). Our goal is to make all dominoes horizontal (*brickwork*) by a sequence of flips in as few operations as possible.
Let's color our rectangle in a chessboard color, assuming the bottom left corner to be black. Let's draw the arrows along the sides of the squares so that the black squares go counterclockwise, and the white

ones go clockwise.
Let us be given some tiling of a rectangle with dominoes, which we denote by T. Let us associate the tiling with its *height function* – it will be the function at the vertices of the cells of our rectangle, which we will denote by $H_T(v)$. We define it as follows. Select the lower left vertex of the v_0 rectangle and set its height to zero; further, each vertex v is connected to v_0 by a path that passes along the grid lines and does not intersect the dominoes. This path consists of arrows, each of which is traversed either in the same direction (i.e., co-directed with the path), or in the opposite direction. Let the height of $H_T(v)$ be equal to the difference in the number of trailing and oppositely directed arrows.

Let $H(v)$ be a function on the vertices of the graph G satisfying the following property: for any connected vertices u and v, the edge between which is directed from u to v there is $H(v) = H(u) + 1$ or $H(v) = H(u) - 3$. Prove that $H(v)$ is a function of the height of the unique tiling T.

Solution (RUS). Единственность следует из такого простого соображения. Рассмотрим те ребра, разность функций высоты на концах которых равна единице. Эти ребра будут образовывать границы доминошек нашего разбиения; напротив, те ребра, разность функций высоты на концах которых равна минус трем, будут «закрыты» доминошками.

Далее, рассмотрим какую-нибудь клетку. Все стрелки на ее границе направлены в одном направлении: либо по часовой стрелке, либо против. Поскольку сумма приращений функции высоты при обходе этой клетки равна нулю, это значит, что существует ровно три ребра из четырех, для которых разность значений функции высоты на их концах равна единице, и одно ребро, для которого эта разность равна минус трем; оно и будет закрыто доминошкой. То же самое можно будет сказать и про клетку, смежную с данной по этому ребру. Тем самым все клетки окажутся разбитыми на пары, то есть в итоге действительно получится замощение нашего прямоугольника.

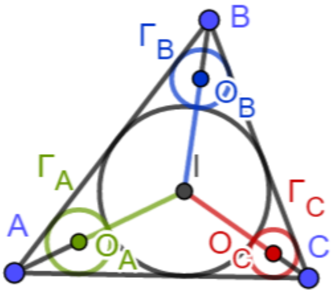
Solution (ENG). Uniqueness follows from such a simple consideration. Consider those edges, the difference of the height functions at the ends of which is equal to one. These edges will form the boundaries of the dominoes of our tiling; on the contrary, those edges, the difference of the height functions at the ends of which is equal to minus three, will be «closed» by dominoes.

Next, consider a cell. All arrows on its border point in the same direction: either clockwise or counterclockwise. Since the sum of the increments of the height function when traversing this cell is equal to zero, this means that there are exactly three edges out of four for whichthe difference in the valuesof the height function at their ends is equal to one, and one edge for which this difference is equal to minus three; it will be closed by the domino. The same can be said about the cell adjacent to the given one along this edge. Thus, all the cells will be divided into pairs, that is, in the end, we really get a tiling of our rectangle.

Task 4. Дан треугольник ABC. Докажите, что существует единственный набор таких трёх окружностей ω_A, ω_B и ω_C, которые лежат внутри треугольника, попарно друг друга касаются, а также каждая из них касается сторон соответствующего угла: ω_A касается сторон AB и AC, ω_B касается сторон BA и BC, ω_C касается сторон CA и CB.

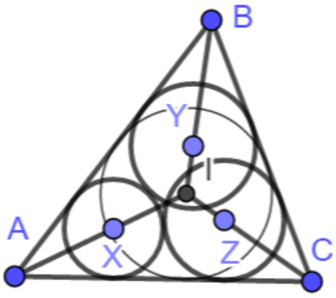
There is a triangle ABC. Prove that there is a unique set of such three circles ω_A, ω_B and ω_C, which lie inside the triangle, touch each other in pairs, and also each of them touches the sides of the corresponding angle: ω_A touches the sides of AB and AC, ω_B touches the sides BA and BC, ω_C touches the sides CA and CB.

Solution (RUS).



Рассмотрим окружность, вписанную в угол A и касающуюся внешним образом вписанной окружности треугольника ABC. Обозначим такую окружность Γ_A, а её центр – O_A. Аналогично определяются $\Gamma_B, \Gamma_C, O_B, O_C$.

Будем двигать эти окружности, сохраняя их вписанной в соответствующий угол: $\Gamma_A(P)$ будет обозначать окружность, вписанную в угол A треугольника и с центром в точке P. То есть $\Gamma_A(O_A) = \Gamma_A$, а $\Gamma_A(I)$ – вписанная окружность (где I – центр вписанной окружности). Аналогично определяются семейства окружностей $\Gamma_B(Q)$ и $\Gamma_C(R)$.

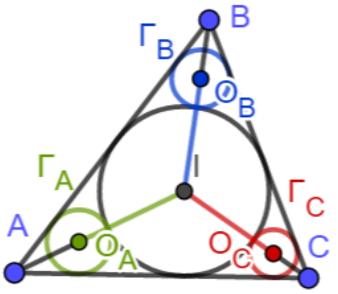


Утверждение: для каждой точки X с отрезка O_AI и соответствующей окружности $\Gamma_A(X)$ существует единственная касающаяся её окружность $\Gamma_B(Y)$ (также как существует и единственная касающаяся её окружность $\Gamma_C(Z)$). Причём чем больше радиус $\Gamma_A(X)$, тем меньше радиус касающихся её $\Gamma_B(Y)$ и $\Gamma_C(Z)$.

Доказательство этого утверждения почти очевидно: достаточно рассмотреть непрерывное смещение центра Y окружности $\Gamma_B(Y)$ от точки O_B до I (вдоль биссектрисы BI). Если $\Gamma_A(X)$ не совпадает ни с Γ_A, ни с вписанной окружностью, то $\Gamma_B(O_B)$ не имеет общих точек с $\Gamma_A(X)$ (так как Γ_B лежит снаружи от вписанной окружности), а $\Gamma_B(I)$, т.е. вписанная окружность, окружность $\Gamma_A(X)$ точно пересекает. Значит из непрерывности вытекает, что найдётся такой момент Y', до которого окружности $\Gamma_A(X)$ и $\Gamma_B(Y)$ не пересекались, а после которого уже имеют общую точку. Тогда, так как рассматриватриваемые фигуры замкнуты (т.е. содержат все свои граничные точки), легко видеть, что $\Gamma_A(X)$ и $\Gamma_B(Y')$ также имеют общую точку. Причём если бы эти две окружности не касались, то при малом сдвиге Y в любом из направлений от Y' окружности $\Gamma_A(X)$ и $\Gamma_B(Y)$ пересекаются, а значит Y' не соответствует своему выбору. Противоречие.

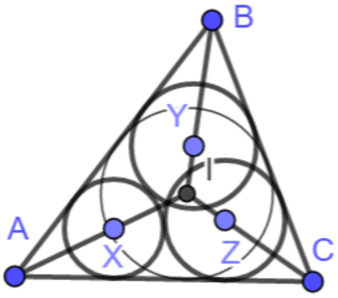
Для завершения доказательства рассмотрим одновременное изменение соответственных окружностей $\Gamma_B(Y)$ и $\Gamma_C(Z)$ при движении центра X окружности $\Gamma_A(X)$ от O_A до I. В начальный момент $(X = O_A)$ центры обоих касающихся окружностей $\Gamma_B(Y)$ и $\Gamma_C(Z)$ совпадают с точкой I, и окружности совпадают. В конечный момент сдвигания X центры $\Gamma_B(Y)$ и $\Gamma_C(Z)$ совпадают с точками O_B и O_C соответственно, а сами окружности не пересекаются. При этом сдвигании точки X точка Y движется по стороне IO_B треугольника IO_BO_C, точка Y – по стороне IO_C. Легко видеть, что при этом расстояние между точками Y и Z непрерывно растёт, а радиусы окружностей непрерывно уменьшаются. В начальный момент времени расстояние между центрами Y и Z меньше суммы радиусов этих двух окружностей (равно 0), а в конечный – больше. Значит, есть единственное положение X, когда эти две величины равны друг другу. Полученные положения окружностей $\Gamma_A(X), \Gamma_B(Y)$ и $\Gamma_C(Z)$ и являются искомыми (а конктрукция единственная из монотонности).

Solution (ENG).



Consider a circle inscribed in a corner A and tangent to the inscribed circle of a triangle ABC. Let us denote such a circle by Γ_A, and its center by O_A. $\Gamma_B, \Gamma_C, O_B, O_C$ are defined similarly.

We will move these circles, keeping them inscribed in the corresponding corner: $\Gamma_A(P)$ will denote the circle inscribed in the corner A of the triangle and centered at the point P. That is, $\Gamma_A(O_A) = \Gamma_A$, and $\Gamma_A(I)$ is the incircle (where I is the center of the incircle). Families of circles $\Gamma_B(Q)$ and $\Gamma_C(R)$ are defined similarly.



Statement: for each point X from the segment O_AI and the corresponding circle $\Gamma_A(X)$ there is a unique circle $\Gamma_B(Y)$ touching it (as well as there is a unique circle touching it circle $\Gamma_C(Z)$). Moreover, the larger the radius $\Gamma_A(X)$, the smaller the radius of $\Gamma_B(Y)$ and $\Gamma_C(Z)$ touching it.

The proof of this statement: it suffices to consider the continuous displacement of the center Y of the circle $\Gamma_B(Y)$ from the point O_B to I (along the bisector BI). If $\Gamma_A(X)$ is not coincides neither with Γ_A nor with the inscribed circle, then $\Gamma_B(O_B)$ has no common points with $\Gamma_A(X)$ (since Γ_B lies outside the inscribed circle), and $\Gamma_B(I)$, i.e. the inscribed circle, the circle $\Gamma_A(X)$ intersects exactly. Hence it follows from continuity that there is a moment Y', up to which the circles $\Gamma_A(X)$ and $\Gamma_B(Y)$ did not intersect, and after which they already have a common point. Then, since the figures under consideration are closed (i.e., they contain all their boundary points), it is easy to see that $\Gamma_A(X)$ and $\Gamma_B(Y')$ also have a common point. Moreover, if these two circles did not touch, then with a small shift of Y in any direction from Y', the circles $\Gamma_A(X)$ and $\Gamma_B(Y)$ intersect, which means that Y' does not matches your choice. That gives us a contradiction.

To complete the proof, consider the simultaneous change of the corresponding circles $\Gamma_B(Y)$ and $\Gamma_C(Z)$ when the center X of the circle $\Gamma_A(X)$ moves from O_A up to I. At the initial moment ($X = O_A$), the centers of both touching circles $\Gamma_B(Y)$ and $\Gamma_C(Z)$ coincide with the point I, and the circles coincide. At the final moment of the shift of X, the centers of $\Gamma_B(Y)$ and $\Gamma_C(Z)$ coincide with points O_B and O_C, respectively, and the circles themselves do not intersect. With this shift of the point X, the point Y moves along the side IO_B of the triangle IO_BO_C, the point Y - on the side of IO_C. It is easy to see that in this case the distance between the points Y and Z is continuously increasing, and the radii of the circles are continuously decreasing. At the initial moment of time, the distance between the centers Y and Z are less than the sum of the radii of these two circles (equal to 0), and in the final - more. This means that there is only one position X when these two quantities are equal to each other. The resulting provisions circles $\Gamma_A(X), \Gamma_B(Y)$ and $\Gamma_C(Z)$ and are the required ones (and the construction is the only one due to monotonicity).

11-12 класс. Разбор задач
11-12 degree. Solution of tasks

Task 1. Решите уравнение:

$$\log_{25}(x-500) - \log_x 25 = 1$$

Solve for x:

$$\log_{25}(x-500) - \log_x 25 = 1$$

Solution (RUS). Заметим, что допустимыми являются лишь $x > 500$.

$$\log_{25}(x-500) = 1 + \log_x 25$$

Левая часть равенства с ростом x возрастает, а правая – убывает. Значит, уравнение имеет не более одного корня, и этот корень можно угадать.

Solution (ENG). Note that $x > 500$.

$$\log_{25}(x-500) = 1 + \log_x 25$$

Left part of the equality is increasing with x and the right part of it is decreasing. Thus, the equation has no more than one root. The root is easy to guess.

Answer: 625

Task 2. Дан треугольник ABC. Существует единственный набор таких трёх окружностей ω_A, ω_B и ω_C, которые лежат внутри треугольника, попарно друг друга касаются, а также каждая из них касается сторон соответствующего угла: ω_A касается сторон AB и AC, ω_B касается сторон BA и BC, ω_C касается сторон CA и CB.
Обозначим точку касания окружностей ω_A и ω_B как T_{AB}. Аналогично определяются точки T_{AC} и T_{BC}.
Дизайнер хочет сконструировать люстру-витраж из цветного стекла, в которой стороны треугольника ABC – это прочный (пренебрежимо) лёгкий контур, в который вписан массивный плоский диск весом 1 кг, а также добавлены уравновешивающие веса в вершинах A, B и C треугольника так, чтобы точка подвеса люстры находилась на пересечении отрезков AT_{BC}, BT_{AC} и CT_{AB} (остальные детали люстры имеют пренебрежимо малый вес). Докажите, что такой проект люстры осуществим и определите уравновешивающие веса в вершинах (то есть такие, чтобы люстра висела горизонтально, закреплённая только в точке подвеса), если радиусы окружностей ω – это r_A, r_B, r_C, а радиус вписанного диска треугольника равен r.

There is a triangle ABC. There is a unique set of such three circles ω_A, ω_B and ω_C, which lie inside the triangle, touch each other in pairs, and also each of them touches the sides of the corresponding angle: ω_A touches the sides of AB and AC, ω_B touches the sides BA and BC, ω_C touches the sides CA and CB.
Let's denote the tangency point of the circles ω_A and ω_B as T_{AC}. Points T_{AB} and T_{BC} are defined similarly.
A designer wants to make a stained glass chandelier made of colored glass, in which the sides of the triangle ABC are a strong light (its weight is zero) contour, into which a massive flat disc weighing 1 kg is inscribed, and balancing weights are added at the vertices A, B and C of a triangle so that the suspension point of the chandelier is at the intersection of the segments AT_{BC}, BT_{AC} and CT_{AB} (other parts of the chandelier are of zero weight). Prove that such a chandelier project is feasible and determine the balancing weights at the vertices (that is, such that the chandelier hangs horizontally only at the suspension point) if the radii of the circles ω are r_A, r_B, r_C, and the radius of the inscribed disk of the triangle is equal to r.

Solution (RUS). Обозначим массы в вершинах A, B и C соответственно как m_A, m_B и m_C. Докажем, что массы $m_A = \dfrac{0.5(r-r_A)}{r_A}, m_B = \dfrac{0.5(r-r_B)}{r_B}, m_C = \dfrac{0.5(r-r_C)}{r_C}$ подходят.

Покажем, что центр масс системы нагруженных точек $(A, m_A), (I, 0.5$ кг$)$ находится в точке I_A – центре окружности $\Gamma_A(X)$ (см. решение задачи 4 для 10 кл.). Из подобия соответствующих прямоугольных треугольников вытекает, что $AI : AI_A = r : r_A$. Тогда $II_A/AI_A = (r - r_A)/r_A$. Чтобы точка I_A была центром масс указанных точек, по правилу рычага, должно выполняться $0.5 \cdot II_A = m_A \cdot AI_A$. Подставив указанное значение для m_A, легко видеть, что правило рычага выполняется и для пары точек $(A, m_A), (I, 0.5)$ (и центра масс I_A), и для пар точек $(B, m_B), (I, 0.5)$ и $(C, m_C), (I, 0.5)$ с центрами масс I_B и I_C соответственно.

Тогда, пользуясь принципом перегруппировки масс, имеем, что центр масс системы точек $(I, 1), (A, m_A), (B, m_B)$ и (C, m_C) совпадает с центром масс системы точек $(I, 0.5), (I_A, 0.5{+}m_A), (B, m_B), ($ что совпадает с центром масс системы $(I_A, 0.5 + m_A), (I_B, 0.5 + m_B), (C, m_C)$.

Но $0.5 + m_A = \frac{1}{2} + \frac{r - r_A}{2r_A} = \frac{r}{2r_A}$. Аналогично, $0.5 + m_B = \frac{r}{2r_B}$ и $0.5 + m_C = \frac{r}{2r_C}$. Значит указанная система нагруженных точек переписывается в виде $\left(I_A, \frac{r}{2r_A}\right), \left(I_B, \frac{r}{2r_B}\right), (C, m_C)$.

Окружности $\Gamma_A(I_A)$ и $\Gamma_B(I_B)$, по выбору, касаются. Значит отрезок I_AI_B равен по длине $r_A + r_B$ и делится точкой T_{AB} на части длины r_A и r_B. Но тогда для точек $\left(I_A, \frac{r}{2r_A}\right), \left(I_B, \frac{r}{2r_B}\right)$ и точки T_{AB} выполняется равенство $\frac{r}{2r_A}\overline{I_AT_{AB}} + \frac{r}{2r_B}\overline{I_BT_{AB}} = 0$. Значит, T_{AB} – центр масс системы из этих двух точек, а значит центр масс изначальной системы $(I, 1), (A, m_A), (B, m_B)$ и (C, m_C), после перегруппировок, совпадает с центром масс системы двух точек: $\left(T_{AB}, \frac{r}{2r_A} + \frac{r}{2r_B}\right), (C, m_C)$. Как следствие, этот центр масс лежит на отрезке $T_{AB}C$. По абсолютно аналогичным причинам, центр масс изначальной четвёрки нагруженных точек лежит также на отрезках BT_{AC} и CT_{AB}. Таким образом, выбранные веса m_A, m_B, m_C удовлетворяют требованию задачи.

Solution (ENG). Let us denote the masses at the vertices A, B and C as m_A, m_B and m_C respectively. Let us prove that the masses are $m_A = \dfrac{0.5(r - r_A)}{r_A}, m_B = \dfrac{0.5(r - r_B)}{r_B}, m_C = \dfrac{0.5(r - r_C)}{r_C}$ fit.

Let us show that the center of mass of the system of loaded points $(A, m_A), (I, 0.5\text{kg})$ is located at the point I_A - the center of the circle $\Gamma_A(X)$ (see the solution to Problem 4 for 10 degree). From the similarity of the corresponding right triangles implies that $AI : AI_A = r : r_A$. Then $II_A/AI_A = (r - r_A)/r_A$. In order for the point I_A to be the center of mass of the indicated points, according to the rule of the lever, $0.5 \cdot II_A = m_A \cdot AI_A$. Substituting the specified value for m_A, it is easy to see that the leverage rule is satisfied for the pair of points $(A, m_A), (I, 0.5)$ (and the center of mass I_A), and for pairs of points $(B, m_B), (I, 0.5)$ and $(C, m_C), (I, 0.5)$ with centers of mass I_B and I_C, respectively.

Then, using the principle of mass rearrangement, we have that the center of mass of the system of points $(I, 1), (A, m_A), (B, m_B)$ and (C, m_C) coincides with the center of mass of the system of points $(I, 0.5), (I_A, 0.5{+}m_A), (B, m_B), (C, m_C)$, which coincides with the center of mass of the system $(I_A, 0.5 + m_A), (I_B, 0.5 + m_B), (C, m_C)$.

But $0.5 + m_A = \frac{1}{2} + \frac{r - r_A}{2r_A} = \frac{r}{2r_A}$. Similarly, $0.5 + m_B = \frac{r}{2r_B}$ and $0.5 + m_C = \frac{r}{2r_C}$. This means that the specified system of loaded points is rewritten as $\left(I_A, \frac{r}{2r_A}\right), \left(I_B, \frac{r}{2r_B}\right), (C, m_C)$.

The circles $\Gamma_A(I_A)$ and $\Gamma_B(I_B)$, optionally, are tangent. This means that the segment I_AI_B is equal in length to $r_A + r_B$ and is divided by the point T_{AB} into parts of the lengths r_A and r_B. But then for points $\left(I_A, \frac{r}{2r_A}\right), \left(I_B, \frac{r}{2r_B}\right)$ and points T_{AB}, the equality $\frac{r}{2r_A}\overline{I_AT_{AB}} + \frac{r}{2r_B}\overline{I_BT_{AB}} = 0$. Hence, T_{AB} is the center of mass of the system of these two points, which means that the center of mass of the original system is $(I, 1), (A, m_A), (B, m_B)$ and (C, m_C), after rearrangements, coincides with the center of mass of the system of two points: $\left(T_{AB}, \frac{r}{2r_A} + \frac{r}{2r_B}\right), (C, m_C)$. As a consequence, the center of mass lies on the segment $T_{AB}C$. For similar reasons, the center of mass of the original four loaded points also lies on the segments BT_{AC} and CT_{AB}. Thus, the selected weights m_A, m_B, m_C satisfy the requirement of the problem.

Task 3. *П.В.Бибиков, тренер сборной Москвы на Всероссийской олимпиаде школьников по математике, предлагает вам решить следующую задачу:*

Дан клетчатый прямоугольник $2m \times 2n$, разбитый произвольным образом на доминошки 2×1.

Если две доминошки образуют квадрат 2×2, разрешается повернуть их обе на $90°$ (сделать *флип*). Наша цель — последовательностью флипов сделать все доминошки горизонтальными (*кирпичная кладка*) за как можно меньшее количество операций.
Раскрасим наш прямоугольник в шахматную раскраску, считая левый нижний угол черным. Направим по сторонам квадратиков стрелочки так, чтобы черные квадратики обходились бы против часовой стрелки, а белые — по часовой стрелке.
Пусть нам дано некоторое замощение прямоугольника доминошками, которое мы обозначим через T. Сопоставим замощению его *функцию высоты* — это будет функция на вершинах клеток нашего прямоугольника, которую мы будем обозначать $H_T(v)$. Определим ее следующим образом. Выберем левую нижнюю вершину v_0 прямоугольника и положим ее высоту равной нулю; далее, каждую вершину v соединим с v_0 путем, который проходит по линиям сетки и не пересекает доминошек. Этот путь состоит из стрелок, каждая из которых проходится либо в попутном направлении (т. е. сонаправлена с путем), либо в противоположном. Положим высоту $H_T(v)$ равной разности числа попутных и противоположно направленных стрелок.
Назовем *кирпичной кладкой* разбиение $T_{\min}$, в котором все доминошки горизонтальны. Назовем *приведенной высотой разбиения* T величину

$$h_T(v) = \frac{|H_T(v) - H_{T_{\min}}(v)|}{4}.$$

Назовем *рангом замощения* T число $r(T) = \sum\limits_v h_T(v)$. Докажите, что любое замощение T можно превратить в кирпичную кладку за $r(T)$ флипов, причем за меньшее количество флипов это сделать невозможно.

P.Bibikov, coach of the Moscow team at the All-Russian Olympiad in mathematics, suggests you the following problem:
There is a checkered rectangle $2m \times 2n$ given, arbitrarily divided into rectangles 2×1 («dominoes»). If two dominoes form a 2×2 square, it is allowed to rotate them both by $90°$ (make a *flip*). Our goal is to make all dominoes horizontal (*brickwork*) by a sequence of flips in as few operations as possible.
Let's color our rectangle in a chessboard color, assuming the bottom left corner to be black. Let's draw the arrows along the sides of the squares so that the black squares go counterclockwise, and the white ones go clockwise.
Let us be given some tiling of a rectangle with dominoes, which we denote by T. Let us associate the tiling with its *height function* – it will be the function at the vertices of the cells of our rectangle, which we will denote by $H_T(v)$. We define it as follows. Select the lower left vertex of the v_0 rectangle and set its height to zero; further, each vertex v is connected to v_0 by a path that passes along the grid lines and does not intersect the dominoes. This path consists of arrows, each of which is traversed either in the same direction (i.e., co-directed with the path), or in the opposite direction. Let the height of $H_T(v)$ be equal to the difference in the number of trailing and oppositely directed arrows.

Let's call *brickwork* the partition $T_{\min}$ in which all the dominoes are horizontal. We call *the reduced height of the partition* T the value

$$h_T(v) = \frac{|H_T(v) - H_{T_{\min}}(v)|}{4}.$$

We call *the rank of the tiling* T the number $r(T) = \sum\limits_v h_T(v)$. Prove that any tiling T can be turned into brickwork in $r(T)$ flips, and this cannot be done in less number of flips.

Solution (RUS). Будем вести индукцию по величине $r(T)$. Если $r(T) = 0$, доказывать нечего, т.к. тогда $H_T = H_{T_{\min}}$, и, как мы доказали в задаче 3 для 10 класса, функция высоты однозначно задает разбиение, откуда $T = T_{\min}$. В противном случае рассмотрим в замощении T функцию

$|H_T|$, и пусть v_1 — вершина, в которой эта функция достигает глобального максимума (если таких вершин несколько, выберем любую из них). Заметим, что в этой вершине можно сделать флип. Действительно, рассмотрим квадрат 2×2, центром которого является вершина v_1. Тогда или горизонтальные, или вертикальные ребра, выходящее из v_1, должны быть закрыты доминошками разбиения T (если из вершины v_1 выходит и горизонтальное, и вертикальное ребра, то, сдвинувшись по одному из них, можно увеличить значение $|H_T(v_1)|$, что невозможно, т.к. v_1 — Точка максимума). Значит, квадрат 2×2 действительно разбит на две доминошки, и флип возможен.

Сделаем флип с центром в этой точке. Данный флип уменьшит приведеную высоту вершины v_1 на 1, а высоты остальных вершин оставит без изменений. Таким образом мы получим новое замощение T', для которого $r(T') = r(T) - 1$. Применяя предположение индукции, получаем требуемое.

Solution (ENG). We will carry out induction on the value of $r(T)$. If $r(T) = 0$, there is nothing to prove, because then $H_T = H_{T_{\min}}$, and, as we proved in task 3 for 10th degree, the height function uniquely defines a partition, whence $T = T_{\min}$. Otherwise, consider the function $|H_T|$ in the tiling T, and let v_1 be the vertex at which this function reaches its global maximum (if there are several such vertices, choose any of them). Note that a flip can be made at this vertex. Indeed, consider the square 2×2, the center of which is the vertex v_1. Then either horizontal or vertical edges emerging from v_1 must be closed by dominoes of the partition T (if both horizontal and vertical edges emerge from the vertex v_1, then moving along one of them, we can increase the value of $|H_T(v_1)|$, which is impossible, because v_1 is the maximum point). This means that the square 2×2 is really split into two dominoes, and a flip is possible.

Let's make a flip centered at this point. This flip will decrease the reduced height of the vertex v_1 by 1, and leave the heights of the remaining vertices unchanged. Thus, we get a new tiling T', for which $r(T') = r(T) - 1$. Applying the induction hypothesis, we obtain what is required.

Task 4. *Профессор А.С.Климчик предлагает вам решить следующую задачу:*
Дана система уравнений, описывающая положение и ориентацию исполнительного механизма робота на плоскости вида

$$\begin{cases} x = a \cdot \cos(\phi_1) + b \cdot \cos(\phi_1 + \phi_2) + c \cdot \cos(\phi_1 + \phi_2 + \phi_3) \\ y = a \cdot \sin(\phi_1) + b \cdot \sin(\phi_1 + \phi_2) + c \cdot \sin(\phi_1 + \phi_2 + \phi_3) \\ \gamma = \phi_1 + \phi_2 + \phi_3 \end{cases}$$

Найдите конфигурацию (ϕ_1, ϕ_2, ϕ_3) для заданного положения и ориентации (x, y, γ), а также известных a, b, c. При каких a, b, c задача имеет решение?

Professor A.Klimchik suggests you the following problem:
A system of equations is given that describes the position and orientation of the robot's actuator on the plane

$$\begin{cases} x = a \cdot \cos(\phi_1) + b \cdot \cos(\phi_1 + \phi_2) + c \cdot \cos(\phi_1 + \phi_2 + \phi_3) \\ y = a \cdot \sin(\phi_1) + b \cdot \sin(\phi_1 + \phi_2) + c \cdot \sin(\phi_1 + \phi_2 + \phi_3) \\ \gamma = \phi_1 + \phi_2 + \phi_3 \end{cases}$$

Find the configuration (ϕ_1, ϕ_2, ϕ_3) for a given position and orientation (x, y, γ), as well as known a, b, c. For what a, b, c does the problem have a solution?

Solution (RUS). Изобразим на координатной плоскости трехзвенный манипулятор (звенья длин $|a|, |b|, |c|$), первое звено AB которого – отрезок с началом в $A(0, 0)$, а третье – отрезок с концом $D(x, y)$. Тогда ϕ_1 – угол, образованный первым звеном и осью x, ϕ_2 и ϕ_3 – углы соответственно между первым и вторым, и вторым и третьим звеньями манипулятора, а γ – угол между направленным третьим звеном и положительным направлением оси x.
Изобразим окружности ω_A и ω_D с центрами в точках A и D и радиусами $|a|$ и $|c|$ соответственно. Вектор $\overrightarrow{CD}$ (третье звено манипулятора) образует известный угол γ – таким образом, точка C

имеет координаты $(x - c \cdot \cos\gamma; y - c \cdot \sin\gamma)$. Изобразим окружность ω_C с центром в точке C и радиусом $|b|$.
Количество общих точек окружностей ω_A и ω_C равно количеству решений задачи. Задача не имеет решений, если треугольника (пусть и вырожденного) со сторонами $|AC|, |a|, |b|$ не существует.
Найдем одно из решений задачи. Рассмотрим $\triangle ABC$ (BC – второе звено манипулятора). В нем $|AB| = |a|, |BC| = |b|, |AC| = \sqrt{(x - c \cdot \cos\gamma)^2 + (y - c \cdot \sin\gamma)^2}$. Зная стороны треугольника, найдем его углы (используя теоремы синусов и косинусов). Так, $\angle BAC = \arccos \frac{a^2+|AC|^2-b^2}{2|a|\cdot|AC|}$, причем $\phi_1 = \angle BAC + \operatorname{arctg} \frac{x-c\cdot\cos\gamma}{y-c\cdot\sin\gamma}$. Аналогично, $\phi_2 = \pi - \angle ABC = \pi - \arccos \frac{a^2+b^2-|AC|^2}{2|a|\cdot|b|}$. Наконец, $\phi_3 = \gamma - \phi_1 - \phi_2$.

Solution (ENG). We represent on the coordinate plane a three-link manipulator (links of lengths $|a|, |b|, |c|$), the first link AB of which is a segment with the origin at $A(0,0)$, and the third one is a segment with the end $D(x, y)$. Then ϕ_1 is the angle formed by the first link and the x axis, ϕ_2 and ϕ_3 are the angles between the first and second, and the second and third links of the manipulator, respectively, and γ is the angle between the directed third link and the positive direction of the x axis.
Draw circles ω_A and ω_D with centers at points A and D and radii $|a|$ and $|c|$, respectively. The vector $\overrightarrow{CD}$ (the third link of the manipulator) forms the known angle γ – thus the point C has coordinates $(x - c \cdot \cos\gamma; y - c \cdot \sin\gamma)$. Draw the circle ω_C centered at C with radius of $|b|$.
The number of common points of the circles ω_A and ω_C is equal to the number of solutions to the problem. The problem has no solutions if a triangle (even if it has angle of 0) with sides $|AC|, |a|, |b|$ does not exist.
Let's find one of the solutions to the problem. Consider $\triangle ABC$ (BC is the second link of the manipulator). In it $|AB| = |a|, |BC| = |b|, |AC| = \sqrt{(x - c \cdot \cos\gamma)^2 + (y - c \cdot \sin\gamma)^2}$. Knowing the sides of the triangle, we find its angles (using al-Kashi's theorem and law of sines). So, $\angle BAC = \arccos \frac{a^2+|AC|^2-b^2}{2|a|\cdot|AC|}$, and $\phi_1 = \angle BAC + \operatorname{arctg} \frac{x-c\cdot\cos\gamma}{y-c\cdot\sin\gamma}$. Similarly, $\phi_2 = \pi - \angle ABC = \pi - \arccos \frac{a^2+b^2-|AC|^2}{2|a|\cdot|b|}$. Finally, $\phi_3 = \gamma - \phi_1 - \phi_2$.