Олимпиада по математике
Innopolis Open

АНО ВО «Университет Иннополис»
2021-2022

Содержание

Введение / Introduction

Каждый участник отборочного тура получил комплект из 6 задач, при этом каждая из них случайным образом выбирается из 4-х вариантов.
Первые 4 задачи подразумевают краткий ответ в виде целого числа или десятичной дроби, при необходимости округленной до сотых.
Задачи под номерами 5 и 6 требуют пошагового изложения рассуждений, которые приводят к ответу на вопрос задачи. Если на вопрос задачи 5 или 6 дан только краткий ответ, то ее решение оценивается в 0 баллов, даже если ответ верный.
Участники финала получили комплект из 5 задач, каждая из которых подразумевала развернутое решение.
Задачи Олимпиады разрабатывали

- Профессор Н.В.Шилов – руководитель лаборатории программной инженерии АНО ВО «Университет Иннополис»
- П.В.Бибиков – тренер команды Москвы на Всероссийской математической олимпиаде
- А.А.Гаврилюк – член жюри и автор задач Всероссийской и Международной математических олимпиад
- Д.Ю.Бродский – разработчик задач от компании партнера «Тинькофф», член жюри регионального этапа Всероссийской олимпиады школьников по математике, член жюри Геометрической олимпиады имени И.Ф.Шарыгина
- Д.Е.Бебчук – методист по математике АНО ВО «Университет Иннополис»
- И.Ю.Домрачев – победитель Олимпиады «Физтех» в 2019 г., методист по математике ИТ-школы «Прогматика» АНО ВО «Университет Иннополис»

Each participant of a qualifying round was given a set of 6 tasks, with each of them randomly selected from 4 versions.
The first 4 tasks require a short answer in the form of an integer or a decimal fraction, rounded to hundredths if necessary.
Task 5 and 6 require detailed solution that leads to the answer to the question of a task. If only a short answer was presented to the question of such task, then its solution was estimated at 0 points, even if the answer was correct.
The finalists received a set of 5 tasks with each of them requiring detailed solution.
The task of the Olympiad have been created by

- Professor N.V. Shilov – Head of Software Engineering Laboratory of Innopolis University
- P.V.Bibikov – coach of the Moscow team at the All-Russian Olympiad in Mathematics
- A.A. Gavrilyuk – jury member and author of some tasks of the All-Russian and International Olympiads in Mathematics
- D.U.Brodsky – task developer from the partner company «Tinkoff», jury member of the regional stage of the All-Russian Olympiad in mathematics and the Geometric Olympiad named after I.F. Sharygin
- D.E. Bebchuk – methodologist in Mathematics at Innopolis University
- I.U.Domrachev – winner of «PhysTech» Olympiad in 2019, methodologist in Mathematics in «Progmatica» IT-school in Innopolis University

Система оценивания / Task score

1. Первичная оценка решения каждой задачи выставляется по 5-балльной шкале, где
   0 — задача не решена или решена неверно из-за грубых ошибок в рассуждениях;
   1 — задача решена неверно, но присутствует плодотворная идея, применимая для решения задачи;
   2 — задача решена неверно, но присутствует и частично применена плодотворная идея, достигнут некоторый прогресс в решении;
   3 — задача решена частично либо полностью, но с существенными арифметическими ошибками при наличии правильного хода рассуждений;
   4 — задача решена верно, но с незначительными ошибками;
   5 — задача полностью решена.
   Если к задаче нужен только краткий ответ, то по ней выставляется либо 0 баллов, либо 5.

2. Для каждой задачи вычисляется средний балл (M) по результатам ее решения всеми участниками.

3. Весовой коэффициент (K) каждой задачи вычисляется по формуле

$$K = 3 - 0.5 \cdot M$$

4. Балл каждого участника за каждую задачу умножается на весовой коэффициент этой задачи.

5. Баллы, набранные участником, суммируются с последующим округлением до ближайшего целого в бо́льшую сторону.

1. Pre-score of the solution to each problem is set on a 5-point scale, where
   0 — a task was not solved or solved incorrectly due to gross reasoning blunder;
   1 — a task was solved incorrectly but there is a fruitful idea that can be used to solve the task;
   2 — a task was solved incorrectly but a fruitful idea is present and partially applied, some progress has been made in the solution;
   3 — a task was solved partially or completely but with significant arithmetic errors in the presence of the correct line of reasoning;
   4 — a task was solved correctly but with minor errors;
   5 — a task was solved completely.
   If the task requires short answer then pre-score will be 0 or 5 points.

2. An average score (M) is calculated based on the results of all participants for each task.

3. The weighting factor (K) of each task is calculated using formula

$$K = 3 - 0.5 \cdot M$$

4. Each participant's score for each task is multiplied by the weighting factor of that task.

5. The points scored by the participant are summed and then rounded up to the nearest integer.

1-й отборочный тур / 1st qualifying round

7-й класс / 7th degree

Task 1.

1. Найдите произведение натуральных чисел x и y, удовлетворяющих равенству:

   $$4\frac{2}{x} \cdot y\frac{1}{3} = 10$$

   (выражение вида $a\frac{b}{c}$ обозначает $a + \frac{b}{c}$)

   Find $x \cdot y$ while x and y are positive integers satisfying the equality:

   $$4\frac{2}{x} \cdot y\frac{1}{3} = 10$$

   (expression like $a\frac{b}{c}$ means $a + \frac{b}{c}$)

   Answer: 14

2. Найдите произведение натуральных чисел x и y, удовлетворяющих равенству:

   $$2\frac{1}{x} \cdot y\frac{1}{5} = 8$$

   (выражение вида $a\frac{b}{c}$ обозначает $a + \frac{b}{c}$)

   Find $x \cdot y$ while x and y are positive integers satisfying the equality:

   $$2\frac{1}{x} \cdot y\frac{1}{5} = 8$$

   (expression like $a\frac{b}{c}$ means $a + \frac{b}{c}$)

   Answer: 6

3. Найдите произведение натуральных чисел x и y, удовлетворяющих равенству:

   $$4\frac{2}{x} \cdot y\frac{1}{7} = 10$$

   (выражение вида $a\frac{b}{c}$ обозначает $a + \frac{b}{c}$)

   Find $x \cdot y$ while x and y are positive integers satisfying the equality:

   $$4\frac{2}{x} \cdot y\frac{1}{7} = 10$$

   (expression like $a\frac{b}{c}$ means $a + \frac{b}{c}$)

   Answer: 6

4. Найдите произведение натуральных чисел x и y, удовлетворяющих равенству:

   $$5\frac{1}{x} \cdot y\frac{1}{11} = 6$$

   (выражение вида $a\frac{b}{c}$ обозначает $a + \frac{b}{c}$)

   Find $x \cdot y$ while x and y are positive integers satisfying the equality:

   $$5\frac{1}{x} \cdot y\frac{1}{11} = 6$$

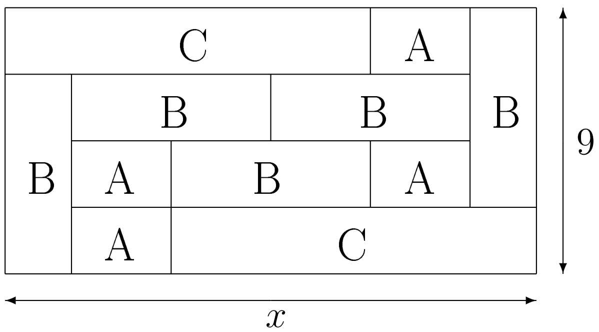
   (expression like $a\frac{b}{c}$ means $a + \frac{b}{c}$)

   Answer: 2

Solution (ENG). *Explaining the solution of the 1st version of the task, the others are solved similarly.*
If $y \geq 3$ then $4^{\frac{2}{x}} \cdot y^{\frac{1}{3}} > 4^{\frac{2}{x}} \cdot y > 4y \geq 12 > 10$. If $y = 1$ then $4^{\frac{2}{x}} = \frac{15}{2}$, which is impossible for positive integer x. Thus, $y = 2$. So, $x = 7$ and $x \cdot y = 14$.

Solution (RUS). *Разбор варианта №1, остальные решаются аналогично.*
Если $y \geq 3$, то $4^{\frac{2}{x}} \cdot y^{\frac{1}{3}} > 4^{\frac{2}{x}} \cdot y > 4y \geq 12 > 10$. Если $y = 1$, то $4^{\frac{2}{x}} = \frac{15}{2}$, то невозможно для натуральных x. Значит, $y = 2$. Отсюда легко находим $x = 7$ и $x \cdot y = 14$.

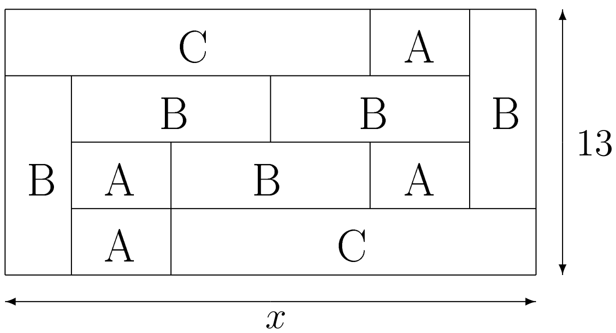
Task 2.

1. 

На рисунке (см. выше) изображен большой прямоугольник, разделенный на меньшие прямоугольники трех типов (A, B, C), причем любые два прямоугольника одного типа равны между собой. Меньшая сторона большого прямоугольника равна 9. Найдите его большую сторону x.

The picture (see it above) shows a large rectangle divided into smaller rectangles of three types (A, B, C) such that any two rectangles of the same type are equal to each other. The smaller side of the large rectangle is 9. Find its larger side x.

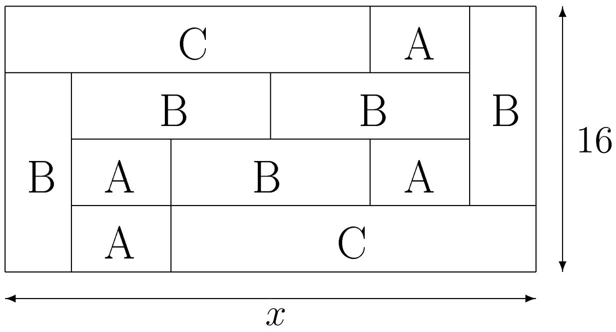
Answer: 18

2. 

На рисунке (см. выше) изображен большой прямоугольник, разделенный на меньшие прямоугольники трех типов (A, B, C), причем любые два прямоугольника одного типа равны между собой. Меньшая сторона большого прямоугольника равна 13. Найдите его большую сторону x.

The picture (see it above) shows a large rectangle divided into smaller rectangles of three types (A, B, C) such that any two rectangles of the same type are equal to each other. The smaller side of the large rectangle is 13. Find its larger side x.

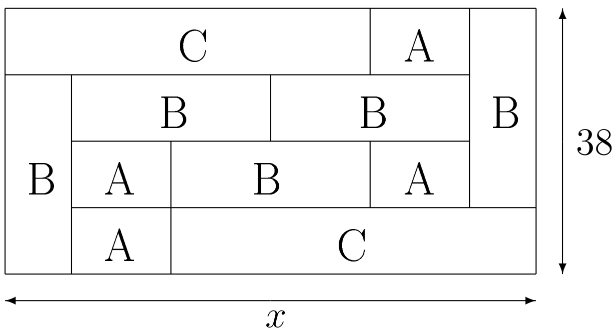
Answer: 26

3. 

На рисунке (см. выше) изображен большой прямоугольник, разделенный на меньшие прямоугольники трех типов (A, B, C), причем любые два прямоугольника одного типа равны между собой. Меньшая сторона большого прямоугольника равна 16. Найдите его большую сторону x.

The picture (see it above) shows a large rectangle divided into smaller rectangles of three types (A, B, C) such that any two rectangles of the same type are equal to each other. The smaller side of the large rectangle is 16. Find its larger side x.

Answer: 32

4. 

На рисунке (см. выше) изображен большой прямоугольник, разделенный на меньшие прямоугольники трех типов (A, B, C), причем любые два прямоугольника одного типа равны между собой. Меньшая сторона большого прямоугольника равна 38. Найдите его большую сторону x.

The picture (see it above) shows a large rectangle divided into smaller rectangles of three types (A, B, C) such that any two rectangles of the same type are equal to each other. The smaller side of the large rectangle is 38. Find its larger side x.

Answer: 76

Solution (ENG). *Explaining the solution of the 1st version of the task, the others are solved similarly.*
Let sides of rectangles A be equal to a, b, sides of rectangles C be equal to a, c. Thus, sides of rectangles B are equal to $a, 2b$. Then we get system of the equations:

$$\begin{cases} a + 2b = 9 \\ 3a = 2b \\ c + b = a + 4b \\ a + b + c = x \end{cases}$$

By solving it we get $x = 2 \cdot 9 = 18$.

Solution (RUS). *Разбор варианта №1, остальные решаются аналогично.*
Пусть стороны прямоугольника A равны a, b, стороны прямоугольника C – a, c. Тогда стороны прямоугольника B равны $a, 2b$. Получим систему уравнений:

$$\begin{cases} a + 2b = 9 \\ 3a = 2b \\ c + b = a + 4b \\ a + b + c = x \end{cases}$$

Решая систему, найдем $x = 2 \cdot 9 = 18$.

Task 3.

1. Четырёхпалые мемцы делят свои сутки на 16 мемов, а каждый мем – на 64 мемасика. У них часы с круглым циферблатом; мемасиковая и мемная стрелки движутся в одном направлении, их начальные положения совпадают, за 1 мем мемасиковая стрелка совершает полный круг, а мемная стрелка совершает полный круг за сутки. Углы мемцы измеряют в мемасиках (1 мс $= \frac{360^\circ}{64}$). В каждом меме (нулевого мема нет, есть 16-й) счастливым считается момент, когда угол между стрелками равен 9 мс. Сколько всего счастливых моментов в сутках?

   Four-fingered creatures divide their day into 16 memes, and each meme into 64 meminutes. They have a clock with a round dial which is rounded by meme arrow in one day; the meme arrow and the meminute arrow move in the same direction with same initial positions; for 1 meme the meminute arrow makes a full circle. Those creatures measure angles in memasics (1 ms $= \frac{360^\circ}{64}$). In every meme (there are all memes from 1 to 16) the moment when the angle between the arrows is 9 ms is considered lucky. How many lucky moments are there in a day?

   Answer: 30

2. Восьмипалые мемцы делят свои сутки на 10 мемов, а каждый мем – на 80 мемасиков. У них часы с круглым циферблатом; мемасиковая и мемная стрелки движутся в одном направлении, их начальные положения совпадают, за 1 мем мемасиковая стрелка совершает полный круг, а мемная стрелка совершает полный круг за сутки. Углы мемцы измеряют в мемасиках (1 мс $= \frac{360^\circ}{80}$). В каждом меме (нулевого мема нет, есть 10-й) счастливым считается момент, когда угол между стрелками равен 17 мс. Сколько всего счастливых моментов в сутках?

   Eight-fingered creatures divide their day into 10 memes, and each meme into 80 meminutes. They have a clock with a round dial which is rounded by meme arrow in one day; the meme arrow and the meminute arrow move in the same direction with same initial positions; for 1 meme the meminute arrow makes a full circle. Those creatures measure angles in memasics (1 ms $= \frac{360^\circ}{80}$). In every meme (there are all memes from 1 to 10) the moment when the angle between the arrows is 17 ms is considered lucky. How many lucky moments are there in a day?

   Answer: 18

3. Шестипалые мемцы делят свои сутки на 14 мемов, а каждый мем – на 84 мемасика. У них часы с круглым циферблатом; мемасиковая и мемная стрелки движутся в одном направлении, их начальные положения совпадают, за 1 мем мемасиковая стрелка совершает полный круг, а мемная стрелка совершает полный круг за сутки. Углы мемцы измеряют в мемасиках (1 мс $= \frac{360^\circ}{84}$). В каждом меме (нулевого мема нет, есть 14-й) счастливым считается момент, когда угол между стрелками равен 13 мс. Сколько всего счастливых моментов в сутках?

   Six-fingered creatures divide their day into 14 memes, and each meme into 84 meminutes. They have a clock with a round dial which is rounded by meme arrow in one day; the meme arrow and the meminute arrow move in the same direction with same initial positions; for 1 meme the meminute arrow makes a full circle. Those creatures measure angles in memasics (1 ms $= \frac{360^\circ}{84}$). In every meme (there are all memes from 1 to 14) the moment when the angle between the arrows is 13 ms is considered lucky. How many lucky moments are there in a day?

Answer: 26

4. Девятипалые мемцы делят свои сутки на 8 мемов, а каждый мем – на 72 мемасика. У них часы с круглым циферблатом; мемасиковая и мемная стрелки движутся в одном направлении, их начальные положения совпадают, за 1 мем мемасиковая стрелка совершает полный круг, а мемная стрелка совершает полный круг за сутки. Углы мемцы измеряют в мемасиках (1 мс $= \frac{360^\circ}{72}$). В каждом меме (нулевого мема нет, есть 8-й) счастливым считается момент, когда угол между стрелками равен 19 мс. Сколько всего счастливых моментов в сутках?

   Nine-fingered creatures divide their day into 8 memes, and each meme into 72 meminutes. They have a clock with a round dial which is rounded by meme arrow in one day; the meme arrow and the meminute arrow move in the same direction with same initial positions; for 1 meme the meminute arrow makes a full circle. Those creatures measure angles in memasics (1 ms $= \frac{360^\circ}{72}$). In every meme (there are all memes from 1 to 8) the moment when the angle between the arrows is 19 ms is considered lucky. How many lucky moments are there in a day?

   Answer: 14

Solution (ENG). *Explaining the solution of the 1st version of the task, the others are solved similarly.*
Note that the angle from the meme to the meminute arrows (with fixed direction) changes from $4(1-n)$ ms to $4n$ ms during each n-th meme; it is clear that this is 60ms, and not a full circle of 64ms. This means that the 3rd and 14th memes each have one lucky moment, and the rest have two lucky moments each. A total of 30 lucky moments.

Solution (RUS). *Разбор варианта №1, остальные решаются аналогично.*
Заметим, что угол от мемной стелки к мемасиковой (зафиксируем направление) меняется на протяжении каждого n-го мема от $4(1-n)$ мс до $4n$ мс.; понятно, что это 60мс., а не полный круг в 64мс. Значит, 3-й и 14-й мемы имеют по одному счастливому моменту, а остальные – по два. Итого 30 счастливых моментов.

Task 4.

1. Варя и Софья играют в игру: Варя пишет на доске натуральное N, потом Софья дописывает к нему справа 8 цифр. Если получился квадрат натурального числа, то Софья побеждает. При каком наименьшем N Софья не может победить?

   Barbara and Sophie play a game: Barbara writes positive integer N on the board, then Sophie adds 8 digits to it on the right. If they get a complete square of some integer, then Sophie wins. What is the smallest N such that Sophie cannot win?

   Answer: 25010000

2. Варя и Софья играют в игру: Варя пишет на доске натуральное N, потом Софья дописывает к нему справа 4 цифры. Если получился квадрат натурального числа, то Софья побеждает. При каком наименьшем N Софья не может победить?

   Barbara and Sophie play a game: Barbara writes positive integer N on the board, then Sophie adds 4 digits to it on the right. If they get a complete square of some integer, then Sophie wins. What is the smallest N such that Sophie cannot win?

Answer: 2600

3. Варя и Софья играют в игру: Варя пишет на доске натуральное N, потом Софья дописывает к нему справа 6 цифр. Если получился квадрат натурального числа, то Софья побеждает. При каком наименьшем N Софья не может победить?

   Barbara and Sophie play a game: Barbara writes positive integer N on the board, then Sophie adds 6 digits to it on the right. If they get a complete square of some integer, then Sophie wins. What is the smallest N such that Sophie cannot win?

   Answer: 251000

4. Варя и Софья играют в игру: Варя пишет на доске натуральное N, потом Софья дописывает к нему справа 10 цифр. Если получился квадрат натурального числа, то Софья побеждает. При каком наименьшем N Софья не может победить?

   Barbara and Sophie play a game: Barbara writes positive integer N on the board, then Sophie adds 10 digits to it on the right. If they get a complete square of some integer, then Sophie wins. What is the smallest N such that Sophie cannot win?

   Answer: 2500100000

Solution (ENG). *Explaining the solution of the 1st version of the task, the others are solved similarly.*
Let N be a number written by Barbara and M be a number consisting of digits added by Sophie. If there is a positive integer c such that $c^2 < 10^8 \cdot N$ and $(c+1)^2 \geq 10^9 \cdot N$, then Sophie cannot win: for any $0 \leq M < 10^8$ the number $\overline{NM} = 10^8 \cdot N + M$ will not be the square of any positive integer, since it will be enclosed between c^2 and $(c+1)^2$.
Note that $(c+1)^2 - c^2 = 2c+1$. Thus, if $2c+1 < 10^8$, then among any 10^8 consecutive positive integers less than $(c+1)^2$ there is a square of some integer. So, $c > 5 \cdot 10^7$ and $\overline{NM} > (5 \cdot 10^7)^2 = 25 \cdot 10^{14}$. Also $(5 \cdot 10^7 + 1)^2 = 2500000100000001 = 25 \cdot 10^{14} + 10^8 + 1$.
Next squares are $25000002 \cdot 10^8 + 1 + 3; 25000003 \cdot 10^8 + 1 + 3 + 5; \ldots$ etc. before $25009999 \cdot 10^8 + m_1 = 50009999^2$ after which we got $50010000^2 = 25010001 \cdot 10^8 + m_2$ for $m_1, m_2 < 10^8$.
So the number we are looking for is 25010000.

Solution (RUS). *Разбор варианта №1, остальные решаются аналогично.*
Пусть N – число, написанное Варей, а M – число, состоящее из цифр, дописанных Софьей. Если найдется натуральное c, такое, что $c^2 < 10^8 \cdot N$ и $(c+1)^2 \geq 10^9 \cdot N$, то Софья не сможет победить: при любом $0 \leq M < 10^8$ число $\overline{NM} = 10^8 \cdot N + M$ не будет квадратом натурального числа, поскольку будет заключено между c^2 и $(c+1)^2$.
Заметим, что $(c+1)^2 - c^2 = 2c+1$. Значит, если $2c+1 < 10^8$, то среди любых 10^8 подряд идущих натуральных чисел, меньших $(c+1)^2$, найдется квадрат натурального числа. Отсюда $c > 5 \cdot 10^7$ – значит, $\overline{NM} > (5 \cdot 10^7)^2 = 25 \cdot 10^{14}$. При этом $(5 \cdot 10^7 + 1)^2 = 2500000100000001 = 25 \cdot 10^{14} + 10^8 + 1$.
Последующие квадраты дают $25000002 \cdot 10^8 + 1 + 3; 25000003 \cdot 10^8 + 1 + 3 + 5; \ldots$ и т.д. вплоть до $25009999 \cdot 10^8 + m_1 = 50009999^2$, после которого идет $50010000^2 = 25010001 \cdot 10^8 + m_2$ для $m_1, m_2 < 10^8$.
Таким образом, наименьшее искомое число – 25010000.

Task 5.

1. Баржу грузоподъёмностью 220 тонн хотят полностью загрузить контейнерами весом в 16 т и 7 т. Получится ли это сделать? Укажите все способы.

   There is a barge with a carrying capacity of 220 tons needed to be fully loaded with containers weighing 16 tons and 7 tons. Can this be done? Explain all the possible ways.

   Answer: 5×16 and 20×7, or 12×16 and 4×7.

2. Баржу грузоподъёмностью 220 тонн хотят полностью загрузить контейнерами весом в 18 т и 13 т. Получится ли это сделать? Укажите все способы.

   There is a barge with a carrying capacity of 220 tons needed to be fully loaded with containers weighing 18 tons and 13 tons. Can this be done? Explain all the possible ways.

   Answer: 5×18 and 10×13.

3. Баржу грузоподъёмностью 380 тонн хотят полностью загрузить контейнерами весом в 16 т и 7 т. Получится ли это сделать? Укажите все способы.

   There is a barge with a carrying capacity of 380 tons needed to be fully loaded with containers weighing 16 tons and 7 tons. Can this be done? Explain all the possible ways.

   Answer: 1×16 and 52×7, or 8×16 and 36×7, or 15×16 and 20×7, or 22×16 and 4×7.

4. Баржу грузоподъёмностью 380 тонн хотят полностью загрузить контейнерами весом в 18 т и 13 т. Получится ли это сделать? Укажите все способы.

   There is a barge with a carrying capacity of 380 tons needed to be fully loaded with containers weighing 18 tons and 13 tons. Can this be done? Explain all the possible ways.

   Answer: 11×18 and 14×13.

Solution (ENG). *Explaining the solution of the 1st version of the task, the others are solved similarly.*
Let x be the number of containers weighing 16 tons and y be the number of containers weighing 7 tons. Then $16x + 7y = 220 \Rightarrow y = \frac{1}{7}(220 - 16x)$. Since 220 gives a remainder of 3 when divided by 7 and y is an integer, therefore $16x$ also gives a remainder of 3 when divided by 7. Let's write out the remainders of x and $16x$ being divided by 7:

$x \pmod 7$	0	1	2	3	4	5	6
$16x \pmod 7$	0	2	4	6	1	3	5

Thus, x is a remainder of 5 when divided by 7 and $0 \leq x \leq \frac{220}{16} \in (13; 14)$. So the possible values of x are 5 or 12. Substituting them into the original equation, we get the corresponding values of y.

Solution (RUS). *Разбор варианта №1, остальные решаются аналогично.*
Пусть x – количество контейнеров весом 16 т, y – количество контейнеров весом 7 т.
Тогда $16x + 7y = 220 \Rightarrow y = \frac{1}{7}(220 - 16x)$. Поскольку 220 дает остаток 3 при делении на 7 и y – целое, значит, $16x$ тоже дает остаток 3 при делении на 7. Выпишем остатки при делении x и $16x$ на 7:

$x \pmod 7$	0	1	2	3	4	5	6
$16x \pmod 7$	0	2	4	6	1	3	5

Значит, x дает остаток 5 при делении на 7 и $0 \le x \le \frac{220}{16} \in (13;14)$. Отсюда возможные значения x – это 5 или 12. Подставляя их в исходное уравнение, получим соответствующие значения y.

Task 6.

1. Во время операции полиция обнаружила 2021 внешне одинаковые монеты, а также записку, в которой сказано, что 1011 монет настоящие, а остальные – фальшивые. Кроме того, в записке указано, что каждая фальшивая монета на один грамм легче любой настоящей.
   Эксперт по подделкам пришел с чашечными весами, которые не только показывают, какая чаша нагружена тяжелее, но и указывают разницу в весе грузов на чашах. Эксперт утверждает, что какую бы монету ни выбрала полиция, можно установить, настоящая она или фальшивая, сделав ровно одно взвешивание. Прав ли он?

   During the operation the police found 2021 outwardly identical coins, as well as a note stating that the 1011 of the coins were real, the rest ones were fake and each fake coin is one gram lighter than any real one.
   The expert came with a weighing scale that shows which bowl is heavier but also indicates the difference (in grams) of the weights on the bowls. The expert claims that whichever coin the police choose, he can determine whether it is real or fake by doing exactly one weighing. Is he right?

2. Во время операции полиция обнаружила 2021 внешне одинаковые монеты, а также записку, в которой сказано, что 501 монета настоящая, а остальные – фальшивые. Кроме того, в записке указано, что каждая фальшивая монета на один грамм легче любой настоящей.
   Эксперт по подделкам пришел с чашечными весами, которые не только показывают, какая чаша нагружена тяжелее, но и указывают разницу в весе грузов на чашах. Эксперт утверждает, что какую бы монету ни выбрала полиция, можно установить, настоящая она или фальшивая, сделав ровно одно взвешивание. Прав ли он?

   During the operation the police found 2021 outwardly identical coins, as well as a note stating that the 501 of the coins were real, the rest ones were fake and each fake coin is one gram lighter than any real one.
   The expert came with a weighing scale that shows which bowl is heavier but also indicates the difference (in grams) of the weights on the bowls. The expert claims that whichever coin the police choose, he can determine whether it is real or fake by doing exactly one weighing. Is he right?

3. Во время операции полиция обнаружила 2021 внешне одинаковые монеты, а также записку, в которой сказано, что 1010 монет настоящие, а остальные – фальшивые. Кроме того, в записке указано, что каждая фальшивая монета на один грамм легче любой настоящей.
   Эксперт по подделкам пришел с чашечными весами, которые не только показывают, какая чаша нагружена тяжелее, но и указывают разницу в весе грузов на чашах. Эксперт утверждает, что какую бы монету ни выбрала полиция, можно установить, настоящая она или фальшивая, сделав ровно одно взвешивание. Прав ли он?

   During the operation the police found 2021 outwardly identical coins, as well as a note stating that the 1010 of the coins were real, the rest ones were fake and each fake coin is one gram lighter than any real one.
   The expert came with a weighing scale that shows which bowl is heavier but also indicates the difference (in grams) of the weights on the bowls. The expert claims that whichever coin the police choose, he can determine whether it is real or fake by doing exactly one weighing. Is he right?

4. Во время операции полиция обнаружила 2021 внешне одинаковые монеты, а также записку, в которой сказано, что 2000 монет настоящие, а остальные – фальшивые. Кроме того, в записке указано, что каждая фальшивая монета на один грамм легче любой настоящей.

Эксперт по подделкам пришел с чашечными весами, которые не только показывают, какая чаша нагружена тяжелее, но и указывают разницу в весе грузов на чашах. Эксперт утверждает, что какую бы монету ни выбрала полиция, можно установить, настоящая она или фальшивая, сделав ровно одно взвешивание. Прав ли он?

During the operation the police found 2021 outwardly identical coins, as well as a note stating that the 2000 of the coins were real, the rest ones were fake and each fake coin is one gram lighter than any real one.
The expert came with a weighing scale that shows which bowl is heavier but also indicates the difference (in grams) of the weights on the bowls. The expert claims that whichever coin the police choose, he can determine whether it is real or fake by doing exactly one weighing. Is he right?

Solution (ENG). To determine the authenticity of a coin it is enough to divide all coins (except for the one chosen by the police) into two equal parts and look at the difference in their weights. Let's prove that the authenticity of the chosen coin depends on the parity of this difference.
Indeed, let there be a fake coins on one bowl and b fake coins on the other. Then the difference shown by the balance is $|b-a|$ and has the same parity as the sum $a+b$. As a result of the weighing we find out the parity of the number of fake coins on the scales. Knowing the parity of the total number of fake coins we can immediately determine the authenticity of the coin that was chosen by the police. So the expert is right.

Solution (RUS). Для определения подлинности монеты достаточно разделить все монеты, кроме выбранной полицией, на две равные части и посмотреть на разность их весов. Докажем, что от четности этой разности зависит подлинность выбранной монеты.
Действительно, пусть на одной чаше находятся a фальшивых монет, а на другой – b фальшивых монет. Тогда разность, которую покажут весы, равна $|b-a|$ и имеет ту же четность, что и сумма $a+b$. Значит, мы в результате взвешивания мы узнаем четность числа фальшивых монет, находящихся на весах. Зная четность общего числа фальшивых монет, мы сразу определим подлинность той монеты, которой на весах не было (т.е. той, которую выбрала полиция). Значит, эксперт прав.

8-9 класс / 8-9 degree

Task 1.

1. Дан прямоугольник $ABCD$, на диагонали BD которого расположена точка E, из которой на стороны AB, BC, CD, DA опущены перпендикуляры EA_1, EB_1, EC_1, ED_1, соответственно. Найдите наибольшее значение суммы площадей AA_1ED_1 и CC_1EB_1, если площадь $ABCD$ равна 26.

   There is a rectangle $ABCD$ with point E on its diagonal BD. There are perpendiculars EA_1, EB_1, EC_1, ED_1 dropped to the sides AB, BC, CD, DA, respectively. Find the largest possible sum of the areas AA_1ED_1 and CC_1EB_1 while the area of $ABCD$ is 26.

   Answer: 13

2. Дан прямоугольник $ABCD$, на диагонали BD которого расположена точка E, из которой на стороны AB, BC, CD, DA опущены перпендикуляры EA_1, EB_1, EC_1, ED_1, соответственно. Найдите наибольшее значение суммы площадей AA_1ED_1 и CC_1EB_1, если площадь $ABCD$ равна 24.

   There is a rectangle $ABCD$ with point E on its diagonal BD. There are perpendiculars EA_1, EB_1, EC_1, ED_1 dropped to the sides AB, BC, CD, DA, respectively. Find the largest possible sum of the areas AA_1ED_1 and CC_1EB_1 while the area of $ABCD$ is 24.

   Answer: 12

3. Дан прямоугольник $ABCD$, на диагонали BD которого расположена точка E, из которой на стороны AB, BC, CD, DA опущены перпендикуляры EA_1, EB_1, EC_1, ED_1, соответственно. Найдите наибольшее значение суммы площадей AA_1ED_1 и CC_1EB_1, если площадь $ABCD$ равна 36.

   There is a rectangle $ABCD$ with point E on its diagonal BD. There are perpendiculars EA_1, EB_1, EC_1, ED_1 dropped to the sides AB, BC, CD, DA, respectively. Find the largest possible sum of the areas AA_1ED_1 and CC_1EB_1 while the area of $ABCD$ is 36.

   Answer: 18

4. Дан прямоугольник $ABCD$, на диагонали BD которого расположена точка E, из которой на стороны AB, BC, CD, DA опущены перпендикуляры EA_1, EB_1, EC_1, ED_1, соответственно. Найдите наибольшее значение суммы площадей AA_1ED_1 и CC_1EB_1, если площадь $ABCD$ равна 80.

   There is a rectangle $ABCD$ with point E on its diagonal BD. There are perpendiculars EA_1, EB_1, EC_1, ED_1 dropped to the sides AB, BC, CD, DA, respectively. Find the largest possible sum of the areas AA_1ED_1 and CC_1EB_1 while the area of $ABCD$ is 80.

   Answer: 40

Solution (ENG). Let lengths of the segments EA_1, EB_1, EC_1, ED_1 be equal to a, b, c, d, respectively, and lengths of the segments AD, AB be x, y.
Then

$$\begin{cases} ab = xy - a(x-b) - b(y-a) \\ cd = xy - d(x-c) - c(y-d) \end{cases}$$

Expanding the brackets and subtracting one equation from the other, we get $ab = cd$. Thus, the problem is reduced to finding $2S$, where S is the maximum value of ab.

From the similarity of the triangles DD_1E and DAB we have $\frac{a}{y} = \frac{x-b}{x} \Rightarrow b = -a\frac{x}{y}+x \Rightarrow ab = -a^2\frac{x}{y}+ax$. We will consider the last expression as a function $f(a)$ with parameters x, y. The graph of the function is a parabola with a maximum of $\frac{xy}{4}$ for $a = \frac{y}{2}$.
So, $2S = \frac{xy}{2}$.

Solution (RUS). Пусть длины отрезков EA_1, EB_1, EC_1, ED_1 равны a, b, c, d соответственно, а длины отрезков AD, AB – x, y соответственно. Тогда

$$\begin{cases} ab = xy - a(x-b) - b(y-a) \\ cd = xy - d(x-c) - c(y-d) \end{cases}$$

Раскрывая скобки и вычитая одно уравнение из другого, получим $ab = cd$. Значит, задача сводится к нахождению $2S$, где S – максимальное значение ab.
Из подобия треугольников DD_1E и DAB имеем $\frac{a}{y} = \frac{x-b}{x} \Rightarrow b = -a\frac{x}{y} + x \Rightarrow ab = -a^2\frac{x}{y} + ax$. Будем рассматривать последнее выражение как функцию $f(a)$ с параметрами x, y. График этой функции – парабола с максимумом $\frac{xy}{4}$ при $a = \frac{y}{2}$.
Значит, $2S = \frac{xy}{2}$.

Task 2.

1. Найдите наименьшее натуральное n, при котором число $\sqrt{41+\sqrt{n}} + \sqrt{41-\sqrt{n}}$ является целым.

   Find smallest positive integer n such that $\sqrt{41+\sqrt{n}} + \sqrt{41-\sqrt{n}}$ is an integer.

   Answer: 720

2. Найдите наименьшее натуральное n, при котором число $\sqrt{51+\sqrt{n}} + \sqrt{51-\sqrt{n}}$ является целым.

   Find smallest positive integer n such that $\sqrt{51+\sqrt{n}} + \sqrt{51-\sqrt{n}}$ is an integer.

   Answer: 392

3. Найдите наименьшее натуральное n, при котором число $\sqrt{67+\sqrt{n}} + \sqrt{67-\sqrt{n}}$ является целым.

   Find smallest positive integer n such that $\sqrt{67+\sqrt{n}} + \sqrt{67-\sqrt{n}}$ is an integer.

   Answer: 768

4. Найдите наименьшее натуральное n, при котором число $\sqrt{135+\sqrt{n}} + \sqrt{135-\sqrt{n}}$ является целым.

   Find smallest positive integer n such that $\sqrt{135+\sqrt{n}} + \sqrt{135-\sqrt{n}}$ is an integer.

   Answer: 6776

Solution (ENG). *Explaining the solution of the 1st version of the task, the others are solved similarly.*
Let $\sqrt{41+\sqrt{n}} + \sqrt{41-\sqrt{n}} = c \in \mathbb{Z}$ with $c > 0$. We have $c^2 = 82 + 2\sqrt{41^2 - n} < 162$ because of $n > 0$. The smaller is n, the bigger is c – therefore we must find biggest possible c such that $c^2 < 162$ for some positive integer n. Thus, $c^2 = 144 \Rightarrow c = 12$, then we have $2\sqrt{41^2 - n} = 62 \Rightarrow \sqrt{41^2 - n} = 31 \Rightarrow 41^2 - n = 31^2 \Rightarrow n = 720$.

Solution (RUS). *Разбор варианта №1, остальные решаются аналогично.*
Пусть $\sqrt{41+\sqrt{n}}+\sqrt{41-\sqrt{n}}=c\in\mathbb{Z}$, причем $c>0$. Значит, $c^2=82+2\sqrt{41^2-n}<162$, т.к. $n>0$. Чем меньше n, тем больше c – значит, задача сводится к поиску наибольшего возможного c, такого, что $c^2<162$ и n – натуральное. Значит, $c^2=144\Rightarrow c=12$: тогда $2\sqrt{41^2-n}=62\Rightarrow\sqrt{41^2-n}=31\Rightarrow 41^2-n=31^2\Rightarrow n=720$.

Task 3.

1. Назовем *разбиением* натурального числа n его представление в виде суммы натуральных слагаемых, при этом разбиения, отличающиеся только порядком слагаемых, будем считать различными. Например, одним из разбиений числа 7 является выражение $1+3+2+1$.
   Пусть $F(n)$ – количество всех различных разбиений числа n.
   Решите уравнение: $F(n)=128$.

   Let's call the *partition* of a positive integer n its representation as a sum of positive integers, while partitions that differ only in the order of terms will be considered different. For example, one of the partitions of the number 7 is the expression $1+3+2+1$.
   Let $F(n)$ be the number of all different partitions of a number n.
   Solve the equation: $F(n)=128$.

   Answer: 8

2. Назовем *разбиением* натурального числа n его представление в виде суммы натуральных слагаемых, при этом разбиения, отличающиеся только порядком слагаемых, будем считать различными. Например, одним из разбиений числа 7 является выражение $1+3+2+1$.
   Пусть $F(n)$ – количество всех различных разбиений числа n.
   Решите уравнение: $F(n)=512$.

   Let's call the *partition* of a positive integer n its representation as a sum of positive integers, while partitions that differ only in the order of terms will be considered different. For example, one of the partitions of the number 7 is the expression $1+3+2+1$.
   Let $F(n)$ be the number of all different partitions of a number n.
   Solve the equation: $F(n)=512$.

   Answer: 10

3. Назовем *разбиением* натурального числа n его представление в виде суммы натуральных слагаемых, при этом разбиения, отличающиеся только порядком слагаемых, будем считать различными. Например, одним из разбиений числа 7 является выражение $1+3+2+1$.
   Пусть $F(n)$ – количество всех различных разбиений числа n.
   Решите уравнение: $F(n)=1024$.

   Let's call the *partition* of a positive integer n its representation as a sum of positive integers, while partitions that differ only in the order of terms will be considered different. For example, one of the partitions of the number 7 is the expression $1+3+2+1$.
   Let $F(n)$ be the number of all different partitions of a number n.
   Solve the equation: $F(n)=1024$.

   Answer: 11

4. Назовем *разбиением* натурального числа n его представление в виде суммы натуральных слагаемых, при этом разбиения, отличающиеся только порядком слагаемых, будем считать различными. Например, одним из разбиений числа 7 является выражение $1+3+2+1$.
   Пусть $F(n)$ – количество всех различных разбиений числа n.

Решите уравнение: $F(n) = 16384$.

Let's call the *partition* of a positive integer n its representation as a sum of positive integers, while partitions that differ only in the order of terms will be considered different. For example, one of the partitions of the number 7 is the expression $1 + 3 + 2 + 1$.
Let $F(n)$ be the number of all different partitions of a number n.
Solve the equation: $F(n) = 16384$.

Answer: 15

Solution (ENG). *Explaining the solution of the 1st version of the task, the others are solved similarly.*
Let's find the number of partitions of the positive integer n. To do that we represent it in the form $1 + 1 + \cdots + 1$ – a notion consisting of n «ones» and $n-1$ pluses. Each partition corresponds to an arrangement instead of some (possibly none, and possibly all) pluses «separators» separating the terms of the partition. For example, for $n = 6$ one of the partitions is constructed as follows:

$$1+1+1+1+1+1 \to 1+1 \mid 1 \mid 1+1+1 \to 2+1+3$$

This means that the number of partitions is equal to the number of ways to place separators in the amount from 0 to $n-1$. The number of ways to arrange k separators is equal to C_{n-1}^k. Thus, the number of partitions is $C_{n-1}^0 + C_{n-1}^1 + C_{n-1}^2 + \cdots + C_{n-1}^{n-2} + C_{n-1}^{n-1} = 2^{n-1}$. So, $F(n) = 2^{n-1}$.
$2^{n-1} = 128 \Rightarrow n = 8$.

Solution (RUS). *Разбор варианта №1, остальные решаются аналогично.*
Найдем количество разбиений натурального n. Для этого представим его в виде $1 + 1 + \cdots + 1$ – запись, состоящая из n единиц и $n-1$ плюсов. Каждому разбиению соответствует расстановка вместо некоторых (возможно, ни одного, а возможно, всех) плюсов «перегородок», разделяющих слагаемые разбиения. Например, для $n = 6$ одно из разбиений строится так:

$$1+1+1+1+1+1 \to 1+1 \mid 1 \mid 1+1+1 \to 2+1+3$$

Значит, количество разбиений равно количеству способов расставить вместо $n-1$ плюса перегородки в количестве от 0 до $n-1$. При этом количество способов расставить k перегородок равно C_{n-1}^k. Таким образом, количество разбиений равно $C_{n-1}^0 + C_{n-1}^1 + C_{n-1}^2 + \cdots + C_{n-1}^{n-2} + C_{n-1}^{n-1} = 2^{n-1}$. Значит, $F(n) = 2^{n-1}$.
$2^{n-1} = 128 \Rightarrow n = 8$.

Task 4.

1. В треугольник $\triangle ABC$ с $AB = AC$ вписана окружность (назовем ее ω_0). Строится последовательность окружностей $\omega_0, \omega_1, \omega_2, \ldots$, причем каждая следующая имеет меньший радиус, чем предыдущая, и касается ее (в частности, ω_1 касается ω_0) и сторон угла $\angle A$. Известно, что $\cos\frac{\angle A}{2} = \frac{8}{5\pi}$.
   Пусть Ω – объединение множеств точек, лежащих внутри окружностей $\omega_0, \omega_1, \omega_2, \ldots$. Найдите вероятность того, что точка, случайным образом выбранная внутри $\triangle ABC$, содержится в Ω. Ответ округлите до сотых.

   A circle (let's call it ω_0) is inscribed in a triangle $\triangle ABC$ with $AB = AC$. A sequence of circles $\omega_0, \omega_1, \omega_2, \ldots$ is constructed such that each next circle has a smaller radius than the previous one and touches it (in particular, ω_1 touches ω_0) and the sides of the angle $\angle A$. It is known that $\cos\frac{\angle A}{2} = \frac{8}{5\pi}$.
   Let Ω be the union of the sets of points lying inside the circles $\omega_0, \omega_1, \omega_2, \ldots$. Find the probability that a point randomly selected inside the $\triangle ABC$ lies in Ω. Round your answer to two decimals.

Answer: 0.4

2. В треугольник $\triangle ABC$ с $AB = AC$ вписана окружность (назовем ее ω_0). Строится последовательность окружностей $\omega_0, \omega_1, \omega_2, \ldots$, причем каждая следующая имеет меньший радиус, чем предыдущая, и касается ее (в частности, ω_1 касается ω_0) и сторон угла $\angle A$. Известно, что $\cos \frac{\angle A}{2} = \frac{14}{5\pi}$.
Пусть Ω – объединение множеств точек, лежащих внутри окружностей $\omega_0, \omega_1, \omega_2, \ldots$. Найдите вероятность того, что точка, случайным образом выбранная внутри $\triangle ABC$, содержится в Ω. Ответ округлите до сотых.

A circle (let's call it ω_0) is inscribed in a triangle $\triangle ABC$ with $AB = AC$. A sequence of circles $\omega_0, \omega_1, \omega_2, \ldots$ is constructed such that each next circle has a smaller radius than the previous one and touches it (in particular, ω_1 touches ω_0) and the sides of the angle $\angle A$. It is known that $\cos \frac{\angle A}{2} = \frac{14}{5\pi}$.
Let Ω be the union of the sets of points lying inside the circles $\omega_0, \omega_1, \omega_2, \ldots$. Find the probability that a point randomly selected inside the $\triangle ABC$ lies in Ω. Round your answer to two decimals.

Answer: 0.7

3. В треугольник $\triangle ABC$ с $AB = AC$ вписана окружность (назовем ее ω_0). Строится последовательность окружностей $\omega_0, \omega_1, \omega_2, \ldots$, причем каждая следующая имеет меньший радиус, чем предыдущая, и касается ее (в частности, ω_1 касается ω_0) и сторон угла $\angle A$. Известно, что $\cos \frac{\angle A}{2} = \frac{3}{\pi}$.
Пусть Ω – объединение множеств точек, лежащих внутри окружностей $\omega_0, \omega_1, \omega_2, \ldots$. Найдите вероятность того, что точка, случайным образом выбранная внутри $\triangle ABC$, содержится в Ω. Ответ округлите до сотых.

A circle (let's call it ω_0) is inscribed in a triangle $\triangle ABC$ with $AB = AC$. A sequence of circles $\omega_0, \omega_1, \omega_2, \ldots$ is constructed such that each next circle has a smaller radius than the previous one and touches it (in particular, ω_1 touches ω_0) and the sides of the angle $\angle A$. It is known that $\cos \frac{\angle A}{2} = \frac{3}{\pi}$.
Let Ω be the union of the sets of points lying inside the circles $\omega_0, \omega_1, \omega_2, \ldots$. Find the probability that a point randomly selected inside the $\triangle ABC$ lies in Ω. Round your answer to two decimals.

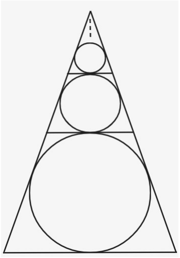
Answer: 0.75

4. В треугольник $\triangle ABC$ с $AB = AC$ вписана окружность (назовем ее ω_0). Строится последовательность окружностей $\omega_0, \omega_1, \omega_2, \ldots$, причем каждая следующая имеет меньший радиус, чем предыдущая, и касается ее (в частности, ω_1 касается ω_0) и сторон угла $\angle A$. Известно, что $\cos \frac{\angle A}{2} = \frac{5}{2\pi}$.
Пусть Ω – объединение множеств точек, лежащих внутри окружностей $\omega_0, \omega_1, \omega_2, \ldots$. Найдите вероятность того, что точка, случайным образом выбранная внутри $\triangle ABC$, содержится в Ω. Ответ округлите до сотых.

A circle (let's call it ω_0) is inscribed in a triangle $\triangle ABC$ with $AB = AC$. A sequence of circles $\omega_0, \omega_1, \omega_2, \ldots$ is constructed such that each next circle has a smaller radius than the previous one and touches it (in particular, ω_1 touches ω_0) and the sides of the angle $\angle A$. It is known that $\cos \frac{\angle A}{2} = \frac{5}{2\pi}$.
Let Ω be the union of the sets of points lying inside the circles $\omega_0, \omega_1, \omega_2, \ldots$. Find the probability that a point randomly selected inside the $\triangle ABC$ lies in Ω. Round your answer to two decimals.

Answer: 0.63

Solution (ENG). *Explaining the solution of the 1st version of the task, the others are solved similarly.*

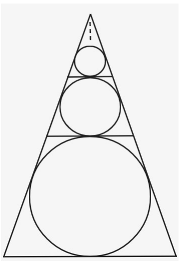


Let's draw lines parallel to BC and tangent to the constructed circles. These lines split the triangle ABC into an infinite number of isosceles similar (due to the equality of all angles and circumcision around the circle) trapezoids. Let's calculate the probability that a point dropped into one of these trapezoids will be inside the inscribed circle.
Let the bases of this trapezoid be x and y, the radius of the inscribed circle is R. The angle between the lateral side and the height of the trapezoid is $\frac{\angle A}{2}$. Then $\cos\frac{\angle A}{2} = \frac{2R}{1/2(x+y)}$ since the sum of the lengths of the bases is equal to twice the lateral side of the trapezoid (due to the existence of an inscribed circle). The desired probability is equal to the ratio of the area of the circle to the area of the trapezoid:

$$P = \frac{\pi R^2}{R(x+y)} = \frac{\pi}{4}\cos\frac{\angle A}{2}$$

The found probability is equal to the probability that is mentioned in the problem statement, since it depends only on the angle $\frac{\angle A}{2}$ and a point accidentally thrown into the triangle will be in one of the trapezoids, after which (with equal probability) will be inside a circle inscribed in a trapezoid.
Thus, $P = \frac{\pi}{4}\cdot\frac{8}{5\pi} = 0.4$.

Solution (RUS). *Разбор варианта №1, остальные решаются аналогично.*



Проведем прямые, параллельные BC и касающиеся построенных окружностей. Эти прямые разобьют треугольник ABC на бесконечное количество равнобедренных подобных (ввиду равенства всех углов и описанности вокруг окружности) трапеций. Вычислим вероятность того, что точка, попавшая в одну из этих трапеций, окажется внутри вписанной в нее окружности.
Пусть основания этой трапеции равны x и y, радиус вписанной окружности равен R. Угол между боковой стороной и высотой трапеции равен $\frac{\angle A}{2}$. Тогда $\cos\frac{\angle A}{2} = \frac{2R}{1/2(x+y)}$, поскольку сумма длин оснований равна удвоенной боковой стороне трапеции (ввиду существования вписанной окружности). Искомая вероятность равна отношению площади круга к площади трапеции:

$$P = \frac{\pi R^2}{R(x+y)} = \frac{\pi}{4}\cos\frac{\angle A}{2}$$

Найденная вероятность равна вероятности, о которой говорится в условии задачи, поскольку зависит только от угла $\frac{\angle A}{2}$: точка, случайно «брошенная» в треугольник, окажется в одной из трапеций, после чего с равной вероятностью окажется внутри вписанной в трапецию окружности.
Значит, $P = \frac{\pi}{4}\cdot\frac{8}{5\pi} = 0.4$.

Task 5.

1. Найдите две последние цифры числа $14^{2021} + 15^{2021}$. Запишите эти цифры в ответ без пробелов, т.е. в виде двузначного числа.

Find the last two digits of the number $14^{2021} + 15^{2021}$. Represent your answer as two-digit number.

Answer: 39

2. Найдите две последние цифры числа $14^{2022} + 15^{2022}$. Запишите эти цифры в ответ без пробелов, т.е. в виде двузначного числа.

   Find the last two digits of the number $14^{2022} + 15^{2022}$. Represent your answer as two-digit number.

   Answer: 21

3. Найдите две последние цифры числа $14^{2021^2} + 15^{2021^2}$. Запишите эти цифры в ответ без пробелов, т.е. в виде двузначного числа.

   Find the last two digits of the number $14^{2021^2} + 15^{2021^2}$. Represent your answer as two-digit number.

   Answer: 39

4. Найдите две последние цифры числа $14^{2022^2} + 15^{2022^2}$. Запишите эти цифры в ответ без пробелов, т.е. в виде двузначного числа.

   Find the last two digits of the number $14^{2022^2} + 15^{2022^2}$. Represent your answer as two-digit number.

   Answer: 41

Solution (ENG). *Explaining the solution of the 1st version of the task, the others are solved similarly.*
Let's write down the last two digits of the numbers 14^n and 15^n:

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
$14^n \pmod{100}$	14	96	44	16	24	36	04	56	84	76	64	96
$15^n \pmod{100}$	15	25	75	25	75	25	75	25	75	25	75	25

The last two digits of the numbers 14^n (from $n = 2$) are repeating with a period of 10; the last two digits of the numbers 15^n (from $n = 2$) are repeating with a period of 2. Thus, the last two digits of the numbers $14^n + 15^n$ (from $n = 2$) are repeating with a period of 10.
So, the last two digits of the number $14^{2021} + 15^{2021}$ coincide with the last two digits of the number $14^{11} + 15^{11}$, i.e. equal to 39.

Solution (RUS). *Разбор варианта №1, остальные решаются аналогично.*
Выпишем последние две цифры чисел 14^n и 15^n:

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
$14^n \pmod{100}$	14	96	44	16	24	36	04	56	84	76	64	96
$15^n \pmod{100}$	15	25	75	25	75	25	75	25	75	25	75	25

Две последние цифры чисел 14^n, начиная с $n = 2$, повторяются с периодом 10; две последние цифры чисел 15^n, начиная с $n = 2$, повторяются с периодом 2. Значит, две последние цифры чисел $14^n + 15^n$, начиная с $n = 2$, повторяются с периодом 10.

Таким образом, последние две цифры числа $14^{2021} + 15^{2021}$ совпадают с последними двумя цифрами числа $14^{11} + 15^{11}$, т.е. равны 39.

Task 6.

1. В языке ABAB словом называется любая последовательность букв A и B. Сколько существует различных слов этого языка, записываемых при помощи 15 букв, в которых содержатся 5 сочетаний AA и по 3 сочетания AB, BA и BB?
Сочетанием букв здесь называется последовательность из двух букв, идущих подряд. Например, в слове ABAAB есть 4 сочетания букв: AB, BA, AA, AB.

   In the ABAB language any word is a sequence of letters A and B. Find number of different words of this language written with 15 letters and containing 5 combinations of AA, 3 combinations of AB, 3 combinations of BA and 3 combinations of BB.
A combination of letters is a sequence of two letters written one-after-another. For example, in the word ABAAB there are 4 combinations of letters: AB, BA, AA, AB.

   Answer: 980

2. В языке ABAB словом называется любая последовательность букв A и B. Сколько существует различных слов этого языка, записываемых при помощи 19 букв, в которых содержатся 6 сочетаний AA и по 4 сочетания AB, BA и BB?
Сочетанием букв здесь называется последовательность из двух букв, идущих подряд. Например, в слове ABAAB есть 4 сочетания букв: AB, BA, AA, AB.

   In the ABAB language any word is a sequence of letters A and B. Find number of different words of this language written with 19 letters and containing 6 combinations of AA, 4 combinations of AB, 4 combinations of BA and 4 combinations of BB.
A combination of letters is a sequence of two letters written one-after-another. For example, in the word ABAAB there are 4 combinations of letters: AB, BA, AA, AB.

   Answer: 13230

3. В языке ABAB словом называется любая последовательность букв A и B. Сколько существует различных слов этого языка, записываемых при помощи 18 букв, в которых содержатся 5 сочетаний AA и по 4 сочетания AB, BA и BB?
Сочетанием букв здесь называется последовательность из двух букв, идущих подряд. Например, в слове ABAAB есть 4 сочетания букв: AB, BA, AA, AB.

   In the ABAB language any word is a sequence of letters A and B. Find number of different words of this language written with 18 letters and containing 5 combinations of AA, 4 combinations of AB, 4 combinations of BA and 4 combinations of BB.
A combination of letters is a sequence of two letters written one-after-another. For example, in the word ABAAB there are 4 combinations of letters: AB, BA, AA, AB.

   Answer: 8330

4. В языке ABAB словом называется любая последовательность букв A и B. Сколько существует различных слов этого языка, записываемых при помощи 17 букв, в которых содержатся 7 сочетаний AA и по 3 сочетания AB, BA и BB?
Сочетанием букв здесь называется последовательность из двух букв, идущих подряд. Например, в слове ABAAB есть 4 сочетания букв: AB, BA, AA, AB.

   In the ABAB language any word is a sequence of letters A and B. Find number of different words

of this language written with 17 letters and containing 7 combinations of AA, 3 combinations of AB, 3 combinations of BA and 3 combinations of BB.
A combination of letters is a sequence of two letters written one-after-another. For example, in the word ABAAB there are 4 combinations of letters: AB, BA, AA, AB.

Answer: 1920

Solution (ENG). *Explaining the solution of the 1st version of the task, the others are solved similarly.*
Each letter of the word, except for the first and the last, is included in two combinations. Therefore, the total number of letters A from these combinations is either double their number in the word (if the first and last letters are not A), or double their number minus 1 (if exactly one letter A is on the edge), or double their number minus 2 (if the word starts and ends with A). The total number of letters A in two-letter combinations is 16, which means that the number of letters A in the word is either 8 or 9.
1) If there are 9 letters A in the word then the first and last letters are A. Let's call a *block* a group of identical letters in a row, which cannot be increased either from the left or from the right (for example, in the word AABBBBBA there are exactly 5 blocks: AA, BB, A, BBB, A). Each block of letters B begins with a combination of AB and ends with a combination of BA (remember that the first and last letters of the word are A), which means there are exactly 3 blocks with letters B (according to the number of combinations AB and BA).
The number of ways to split a sequence of 9 letters A by three blocks of letters B is equal to the number of ways to select three «gaps» between a pair of letters A from 8 «gaps», i.e. C_8^3.
The number of ways to distribute 6 letters B between these three blocks is equal to the number of ways to insert two partitions into the sequence of these letters with 5 «gaps» between them, i.e. C_5^2.
2) Similarly, if the number of letters A is 8, then the word begins and ends with B. There are three blocks of letters A and 3 positions in the word, where to insert these blocks into a sequence of 7 letters B – C_6^3 ways, and the number of ways to distribute the letters A between these three blocks is C_7^2.
So, the total number of words is $C_8^3 \cdot C_5^2 + C_6^3 \cdot C_7^2 = 980$.

Solution (RUS). *Разбор варианта №1, остальные решаются аналогично.*
Каждая буква слова, кроме первой и последней, входит в два сочетания. Поэтому общее количество букв А из этих сочетаний – это либо удвоенное их количество в слове (если первая и последняя буквы – не А), либо удвоенное их количество минус 1 (если ровно одна буква А стоит с краю), либо удвоенное их количество минус 2 (если слово начинается и заканчивается на А). Общее количество букв А в двухбуквенных сочетаниях равно 16 – значит, количество букв А в слове – либо 8, либо 9.
1) Если в слове 9 букв А, то первая и последние буквы слова – А. Назовем *блоком* группу одинаковых букв, идущих подряд, которую нельзя увеличить ни слева, ни справа (например, в слове AABBABBBA ровно 5 блоков: AA, BB, A, BBB, A). Тогда каждый блок букв B начинается с сочетания AB и заканчивается сочетанием BA (не забываем, что первая и последняя буквы слова - A) – значит, блоков с буквами B ровно 3 (по количеству сочетаний AB и BA).
Количество способов разбиения последовательности из 9 букв А тремя блоками букв B равно количеству способов выбрать три «зазора» между парой букв А из 8 «зазоров» , т.е. C_8^3.
Количество способов распределить 6 букв B между этими тремя блоками равно количеству способов вставить две перегородки в последовательность этих букв при 5 «зазорах» между ними, т.е. C_5^2.
2) Аналогично, если количество букв А равно 8, значит, слово начинается и заканчивается на B. В слове есть три блока букв А и 3 позиции, куда вставить эти блоки в последовательность из 7 букв B – C_6^3 способов, а количество способов распределить буквы А между этими тремя блоками равно C_7^2.
Итак, общее количество слов равно $C_8^3 \cdot C_5^2 + C_6^3 \cdot C_7^2 = 980$.

10-11 класс / 10-12 degree

Task 1.

1. В сосуд, имеющий форму прямого кругового конуса, наливают воду. Если сосуд установлен «острым» концом вниз, то расстояние от уровня воды до плоскости основания конуса равно 1 м. Когда сосуд перевернули, оказалось, что расстояние от уровня воды до «острого» конца сосуда равно $\sqrt[3]{4}$ м. Найдите высоту сосуда, ответ дайте в метрах, при необходимости округлив до сотых.
Объем конуса может быть найден по формуле $V = \frac{1}{3}S \cdot h$, *где* S *– площадь его основания,* h *– высота.*

   Water is poured into a vessel of the form of a straight circular cone. If the vessel is installed with the «sharp» end down then the distance from the water level to the base of the cone is 1 m. When the vessel was turned over, it turned out that the distance from the water level to the «sharp» end of the vessel is $\sqrt[3]{4}$ m. Find the height of the vessel; give your answer in meters, rounded to two decimals if needed.
The volume of a cone can be found by the formula $V = \frac{1}{3}S \cdot h$, *where* S *is the area of its base and* h *is its height.*

   Answer: 1.62

2. В сосуд, имеющий форму прямого кругового конуса, наливают воду. Если сосуд установлен «острым» концом вниз, то расстояние от уровня воды до плоскости основания конуса равно 1 м. Когда сосуд перевернули, оказалось, что расстояние от уровня воды до «острого» конца сосуда равно $\sqrt[3]{13}$ м. Найдите высоту сосуда, ответ дайте в метрах, при необходимости округлив до сотых.
Объем конуса может быть найден по формуле $V = \frac{1}{3}S \cdot h$, *где* S *– площадь его основания,* h *– высота.*

   Water is poured into a vessel of the form of a straight circular cone. If the vessel is installed with the «sharp» end down then the distance from the water level to the base of the cone is 1 m. When the vessel was turned over, it turned out that the distance from the water level to the «sharp» end of the vessel is $\sqrt[3]{13}$ m. Find the height of the vessel; give your answer in meters, rounded to two decimals if needed.
The volume of a cone can be found by the formula $V = \frac{1}{3}S \cdot h$, *where* S *is the area of its base and* h *is its height.*

   Answer: 2.56

3. В сосуд, имеющий форму прямого кругового конуса, наливают воду. Если сосуд установлен «острым» концом вниз, то расстояние от уровня воды до плоскости основания конуса равно 1 м. Когда сосуд перевернули, оказалось, что расстояние от уровня воды до «острого» конца сосуда равно $\sqrt[3]{28}$ м. Найдите высоту сосуда, ответ дайте в метрах, при необходимости округлив до сотых.
Объем конуса может быть найден по формуле $V = \frac{1}{3}S \cdot h$, *где* S *– площадь его основания,* h *– высота.*

   Water is poured into a vessel of the form of a straight circular cone. If the vessel is installed with the «sharp» end down then the distance from the water level to the base of the cone is 1 m. When the vessel was turned over, it turned out that the distance from the water level to the «sharp» end of the vessel is $\sqrt[3]{28}$ m. Find the height of the vessel; give your answer in meters, rounded to two decimals if needed.

The volume of a cone can be found by the formula $V = \frac{1}{3}S \cdot h$, where S is the area of its base and h is its height.

Answer: 3.54

4. В сосуд, имеющий форму прямого кругового конуса, наливают воду. Если сосуд установлен «острым» концом вниз, то расстояние от уровня воды до плоскости основания конуса равно 1 м. Когда сосуд перевернули, оказалось, что расстояние от уровня воды до «острого» конца сосуда равно $\sqrt[3]{76}$ м. Найдите высоту сосуда, ответ дайте в метрах, при необходимости округлив до сотых.
   Объем конуса может быть найден по формуле $V = \frac{1}{3}S \cdot h$, где S – площадь его основания, h – высота.

   Water is poured into a vessel of the form of a straight circular cone. If the vessel is installed with the «sharp» end down then the distance from the water level to the base of the cone is 1 m. When the vessel was turned over, it turned out that the distance from the water level to the «sharp» end of the vessel is $\sqrt[3]{76}$ m. Find the height of the vessel; give your answer in meters, rounded to two decimals if needed.
   The volume of a cone can be found by the formula $V = \frac{1}{3}S \cdot h$, where S is the area of its base and h is its height.

   Answer: 5.52

Solution (ENG). *Explaining the solution of the 1st version of the task, the others are solved similarly.*
Let h be the height of the vessel, V_0 its volume, R the radius of the base, V the volume of water. If the vessel is installed with the «sharp» end down, then the water fills the cone with the height $h-1$ and the radius of the base $R_1 = \frac{h-1}{h}R$ (due to the similarity of the axial sections of the cones). After turning over, the water fills a truncated cone of height $h-x$ (here $x = \sqrt[3]{4}$) with base radii R and $R_2 = \frac{x}{h}R$.
Applying the cone volume formula, we get $h^3 - (h-1)^3 = x^3$, thus $h = \frac{1}{2}(1+\sqrt{\frac{4}{3}x^3 - \frac{1}{3}}) = \frac{1}{2}(1+\sqrt{5}) \approx 1.62$.

Solution (RUS). *Разбор варианта №1, остальные решаются аналогично.*
Пусть h – высота сосуда, V_0 – его объём, R – радиус основания, V – объём воды. Если сосуд установлен «острым» концом вниз, то вода заполняет конус высоты $h-1$ и радиусом основания $R_1 = \frac{h-1}{h}R$ (ввиду подобия осевых сечений конусов). После переворачивания вода заполняет усеченный конус высотой $h-x$ (здесь $x = \sqrt[3]{4}$) с радиусами оснований R и $R_2 = \frac{x}{h}R$.
Применяя формулу объёма конуса, получим $h^3 - (h-1)^3 = x^3$, откуда $h = \frac{1}{2}(1+\sqrt{\frac{4}{3}x^3 - \frac{1}{3}}) = \frac{1}{2}(1+\sqrt{5}) \approx 1.62$.

Task 2.

1. Варя и Софья играют в игру: Варя пишет на доске натуральное N, потом Софья дописывает к нему справа 8 цифр. Если получился квадрат натурального числа, то Софья побеждает. При каком наименьшем N Софья не может победить?

   Barbara and Sophie play a game: Barbara writes positive integer N on the board, then Sophie adds 8 digits to it on the right. If they get a complete square of some integer, then Sophie wins. What is the smallest N such that Sophie cannot win?

   Answer: 25010000

2. Варя и Софья играют в игру: Варя пишет на доске натуральное N, потом Софья дописывает к нему справа 4 цифры. Если получился квадрат натурального числа, то Софья побеждает. При каком наименьшем N Софья не может победить?

   Barbara and Sophie play a game: Barbara writes positive integer N on the board, then Sophie adds 4 digits to it on the right. If they get a complete square of some integer, then Sophie wins. What is the smallest N such that Sophie cannot win?

   Answer: 2600

3. Варя и Софья играют в игру: Варя пишет на доске натуральное N, потом Софья дописывает к нему справа 6 цифр. Если получился квадрат натурального числа, то Софья побеждает. При каком наименьшем N Софья не может победить?

   Barbara and Sophie play a game: Barbara writes positive integer N on the board, then Sophie adds 6 digits to it on the right. If they get a complete square of some integer, then Sophie wins. What is the smallest N such that Sophie cannot win?

   Answer: 251000

4. Варя и Софья играют в игру: Варя пишет на доске натуральное N, потом Софья дописывает к нему справа 10 цифр. Если получился квадрат натурального числа, то Софья побеждает. При каком наименьшем N Софья не может победить?

   Barbara and Sophie play a game: Barbara writes positive integer N on the board, then Sophie adds 10 digits to it on the right. If they get a complete square of some integer, then Sophie wins. What is the smallest N such that Sophie cannot win?

   Answer: 2500100000

Solution (ENG). See solution of the task 4 for 7^{th} degree.

Solution (RUS). См. решение задачи №4 для 7 кл.

Task 3.

1. В треугольник $\triangle ABC$ с $AB = AC$ вписана окружность (назовем ее ω_0). Строится последовательность окружностей $\omega_0, \omega_1, \omega_2, \ldots$, причем каждая следующая имеет меньший радиус, чем предыдущая, и касается ее (в частности, ω_1 касается ω_0) и сторон угла $\angle A$. Известно, что $\cos\frac{\angle A}{2} = \frac{8}{5\pi}$.
   Пусть Ω – объединение множеств точек, лежащих внутри окружностей $\omega_0, \omega_1, \omega_2, \ldots$. Найдите вероятность того, что точка, случайным образом выбранная внутри $\triangle ABC$, содержится в Ω. Ответ округлите до сотых.

   A circle (let's call it ω_0) is inscribed in a triangle $\triangle ABC$ with $AB = AC$. A sequence of circles $\omega_0, \omega_1, \omega_2, \ldots$ is constructed such that each next circle has a smaller radius than the previous one and touches it (in particular, ω_1 touches ω_0) and the sides of the angle $\angle A$. It is known that $\cos\frac{\angle A}{2} = \frac{8}{5\pi}$.
   Let Ω be the union of the sets of points lying inside the circles $\omega_0, \omega_1, \omega_2, \ldots$. Find the probability that a point randomly selected inside the $\triangle ABC$ lies in Ω. Round your answer to two decimals.

   Answer: 0.4

2. В треугольник $\triangle ABC$ с $AB = AC$ вписана окружность (назовем ее ω_0). Строится последовательность окружностей $\omega_0, \omega_1, \omega_2, \ldots$, причем каждая следующая имеет меньший радиус,

чем предыдущая, и касается ее (в частности, ω_1 касается ω_0) и сторон угла $\angle A$. Известно, что $\cos\frac{\angle A}{2}=\frac{14}{5\pi}$.
Пусть Ω – объединение множеств точек, лежащих внутри окружностей $\omega_0,\omega_1,\omega_2,\ldots$. Найдите вероятность того, что точка, случайным образом выбранная внутри $\triangle ABC$, содержится в Ω. Ответ округлите до сотых.

A circle (let's call it ω_0) is inscribed in a triangle $\triangle ABC$ with $AB=AC$. A sequence of circles $\omega_0,\omega_1,\omega_2,\ldots$ is constructed such that each next circle has a smaller radius than the previous one and touches it (in particular, ω_1 touches ω_0) and the sides of the angle $\angle A$. It is known that $\cos\frac{\angle A}{2}=\frac{14}{5\pi}$.
Let Ω be the union of the sets of points lying inside the circles $\omega_0,\omega_1,\omega_2,\ldots$. Find the probability that a point randomly selected inside the $\triangle ABC$ lies in Ω. Round your answer to two decimals.

Answer: 0.7

3. В треугольник $\triangle ABC$ с $AB=AC$ вписана окружность (назовем ее ω_0). Строится последовательность окружностей $\omega_0,\omega_1,\omega_2,\ldots$, причем каждая следующая имеет меньший радиус, чем предыдущая, и касается ее (в частности, ω_1 касается ω_0) и сторон угла $\angle A$. Известно, что $\cos\frac{\angle A}{2}=\frac{3}{\pi}$.
Пусть Ω – объединение множеств точек, лежащих внутри окружностей $\omega_0,\omega_1,\omega_2,\ldots$. Найдите вероятность того, что точка, случайным образом выбранная внутри $\triangle ABC$, содержится в Ω. Ответ округлите до сотых.

A circle (let's call it ω_0) is inscribed in a triangle $\triangle ABC$ with $AB=AC$. A sequence of circles $\omega_0,\omega_1,\omega_2,\ldots$ is constructed such that each next circle has a smaller radius than the previous one and touches it (in particular, ω_1 touches ω_0) and the sides of the angle $\angle A$. It is known that $\cos\frac{\angle A}{2}=\frac{3}{\pi}$.
Let Ω be the union of the sets of points lying inside the circles $\omega_0,\omega_1,\omega_2,\ldots$. Find the probability that a point randomly selected inside the $\triangle ABC$ lies in Ω. Round your answer to two decimals.

Answer: 0.75

4. В треугольник $\triangle ABC$ с $AB=AC$ вписана окружность (назовем ее ω_0). Строится последовательность окружностей $\omega_0,\omega_1,\omega_2,\ldots$, причем каждая следующая имеет меньший радиус, чем предыдущая, и касается ее (в частности, ω_1 касается ω_0) и сторон угла $\angle A$. Известно, что $\cos\frac{\angle A}{2}=\frac{5}{2\pi}$.
Пусть Ω – объединение множеств точек, лежащих внутри окружностей $\omega_0,\omega_1,\omega_2,\ldots$. Найдите вероятность того, что точка, случайным образом выбранная внутри $\triangle ABC$, содержится в Ω. Ответ округлите до сотых.

A circle (let's call it ω_0) is inscribed in a triangle $\triangle ABC$ with $AB=AC$. A sequence of circles $\omega_0,\omega_1,\omega_2,\ldots$ is constructed such that each next circle has a smaller radius than the previous one and touches it (in particular, ω_1 touches ω_0) and the sides of the angle $\angle A$. It is known that $\cos\frac{\angle A}{2}=\frac{5}{2\pi}$.
Let Ω be the union of the sets of points lying inside the circles $\omega_0,\omega_1,\omega_2,\ldots$. Find the probability that a point randomly selected inside the $\triangle ABC$ lies in Ω. Round your answer to two decimals.

Answer: 0.63

Solution (ENG). See solution of the task 4 for 8-9 degree.

Solution (RUS). См. решение задачи №4 для 8-9 кл.

Task 4.

1. Найдите количество пар $(x; y)$ натуральных чисел, являющихся решением уравнения

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{1}{2021^2}$$

Если $x \neq y$, то пары $(x; y)$ и $(y; x)$ считаются различными.

Find the number of ordered pairs $(x; y)$ of positive integers satisfying

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{1}{2021^2}$$

If $x \neq y$ then pairs $(x; y)$ and $(y; x)$ are considered to be different.

Answer: 25

2. Найдите количество пар $(x; y)$ натуральных чисел, являющихся решением уравнения

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{1}{2021^5}$$

Если $x \neq y$, то пары $(x; y)$ и $(y; x)$ считаются различными.

Find the number of ordered pairs $(x; y)$ of positive integers satisfying

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{1}{2021^5}$$

If $x \neq y$ then pairs $(x; y)$ and $(y; x)$ are considered to be different.

Answer: 121

3. Найдите количество пар $(x; y)$ натуральных чисел, являющихся решением уравнения

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{1}{2021^{11}}$$

Если $x \neq y$, то пары $(x; y)$ и $(y; x)$ считаются различными.

Find the number of ordered pairs $(x; y)$ of positive integers satisfying

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{1}{2021^{11}}$$

If $x \neq y$ then pairs $(x; y)$ and $(y; x)$ are considered to be different.

Answer: 529

4. Найдите количество пар $(x; y)$ натуральных чисел, являющихся решением уравнения

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{1}{2021^{17}}$$

Если $x \neq y$, то пары $(x; y)$ и $(y; x)$ считаются различными.

Find the number of ordered pairs $(x; y)$ of positive integers satisfying

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{1}{2021^{17}}$$

If $x \neq y$ then pairs $(x; y)$ and $(y; x)$ are considered to be different.

Answer: 1225

Solution (ENG). *Explaining the solution of the 1st version of the task, the others are solved similarly.*
Let's look at the equation (for positive integers x, y and positive integer parameter n):

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{1}{n}$$

$\frac{x+y}{xy} = \frac{1}{n} \Rightarrow xy - nx - ny = 0 \Rightarrow xy - nx - ny + n^2 = n^2 \Rightarrow (x-n)(y-n) = n^2$, while $x, y > n$.
Any solution (x, y) of the equations corresponds to ordered pair of positive integers (d_1, d_2) with $d_1 \cdot d_2 = n^2$. Number of those pairs equals to the number of divisors of n^2. Let's don't forget that number of divisors of $p_1^{k_1} p_2^{k_2} \cdot \dots \cdot p_m^{k_m}$ (for different primes p_i and positive integers k_i) equals to $(k_1+1)(k_2+1)\cdots(k_m+1)$.
Thus, the number of divisors of $2021^{2k} = 43^{2k} \cdot 47^{2k}$ is equal to $(2k+1)^2$. Therefore, the number of solutions of initial equation (i.e. for $k = 2$) equals to 25.

Solution (RUS). *Разбор варианта №1, остальные решаются аналогично.*
Рассмотрим уравнение в натуральных числах с натуральным параметром n:

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{1}{n}$$

$\frac{x+y}{xy} = \frac{1}{n} \Rightarrow xy - nx - ny = 0 \Rightarrow xy - nx - ny + n^2 = n^2 \Rightarrow (x-n)(y-n) = n^2$, где $x, y > n$.
Каждому решению (x, y) этого уравнения соответствует упорядоченная пара (d_1, d_2) натуральных чисел, для которых $d_1 \cdot d_2 = n^2$. Количество таких пар равно количеству делителей числа n^2. При этом количество делителей числа $p_1^{k_1} p_2^{k_2} \cdot \dots \cdot p_m^{k_m}$ (для различных простых p_i и натуральных k_i) равно $(k_1+1)(k_2+1)\cdots(k_m+1)$.
Количество делителей числа $2021^{2k} = 43^{2k} \cdot 47^{2k}$ равно $(2k+1)^2$. Значит, количество решений исходного уравнения (т.е. для $k = 2$) равно 25.

Task 5.

1. Опишите алгоритм построения (с помощью циркуля и линейки без делений) прямоугольного треугольника по гипотенузе и отношению катетов, равному $\frac{3}{4}$.
   С помощью циркуля можно проводить окружности произвольного либо заданного радиуса, а линейка позволяет проводить произвольную прямую, либо прямую, проходящую через одну или две заданные точки. Также можно отмечать произвольную точку плоскости (прямой, отрезка, окружности) и точки пересечения прямых и окружностей.

   Describe the algorithm of constructing (using a compass and a ruler) a right-angled triangle knowing its hypotenuse and the ratio of its legs being equal to $\frac{3}{4}$.
   With the help of a compass you can draw circles of arbitrary or given radius; the ruler allows you to draw an arbitrary straight line or a straight line passing through one or two given points. You can also mark an arbitrary point on the plane (or a straight line, or a segment, or a circle) and intersection points of straight lines and circles.

2. Опишите алгоритм построения (с помощью циркуля и линейки без делений) прямоугольного треугольника по гипотенузе и отношению катетов, равному $\sqrt{3}$.
   С помощью циркуля можно проводить окружности произвольного либо заданного радиуса, а линейка позволяет проводить произвольную прямую, либо прямую, проходящую через одну или две заданные точки. Также можно отмечать произвольную точку плоскости (прямой, отрезка, окружности) и точки пересечения прямых и окружностей.

   Describe the algorithm of constructing (using a compass and a ruler) a right-angled triangle

knowing its hypotenuse and the ratio of its legs being equal to $\sqrt{3}$.
With the help of a compass you can draw circles of arbitrary or given radius; the ruler allows you to draw an arbitrary straight line or a straight line passing through one or two given points. You can also mark an arbitrary point on the plane (or a straight line, or a segment, or a circle) and intersection points of straight lines and circles.

3. Опишите алгоритм построения (с помощью циркуля и линейки без делений) треугольника по радиусу вписанной окружности и отношению длин сторон, равному $4:5:7$.
С помощью циркуля можно проводить окружности произвольного либо заданного радиуса, а линейка позволяет проводить произвольную прямую, либо прямую, проходящую через одну или две заданные точки. Также можно отмечать произвольную точку плоскости (прямой, отрезка, окружности) и точки пересечения прямых и окружностей.

   Describe the algorithm of constructing (using a compass and a ruler) a triangle knowing its inscribed circle's radius and the ratio of its sides being equal to $4:5:7$.
With the help of a compass you can draw circles of arbitrary or given radius; the ruler allows you to draw an arbitrary straight line or a straight line passing through one or two given points. You can also mark an arbitrary point on the plane (or a straight line, or a segment, or a circle) and intersection points of straight lines and circles.

4. Опишите алгоритм построения (с помощью циркуля и линейки без делений) треугольника по его периметру и двум острым углам.
С помощью циркуля можно проводить окружности произвольного либо заданного радиуса, а линейка позволяет проводить произвольную прямую, либо прямую, проходящую через одну или две заданные точки. Также можно отмечать произвольную точку плоскости (прямой, отрезка, окружности) и точки пересечения прямых и окружностей.

   Describe the algorithm of constructing (using a compass and a ruler) a triangle knowing its perimeter and its two acute angles.
With the help of a compass you can draw circles of arbitrary or given radius; the ruler allows you to draw an arbitrary straight line or a straight line passing through one or two given points. You can also mark an arbitrary point on the plane (or a straight line, or a segment, or a circle) and intersection points of straight lines and circles.

Solution (ENG). *Explaining solution of the task 2.*
First, we put a segment of a given length (we denote it by x) on an arbitrary straight line. Let's draw circles of radius x with centers at the ends of this segment – they intersect at two points, each of which, together with the ends of the original segment, forms a triple of vertices of an equilateral triangle. Dividing one of the sides of this triangle in half and connecting its center with the opposite vertex we get a triangle, the hypotenuse of which is equal to the given segment, and the ratio of legs is $\operatorname{tg} 60^\circ = \sqrt{3}$.

Comment. In solving problems 3 and 4, an algorithm for constructing a triangle similar to the original one is used. This algorithm is based on the following:
Let the points B_1, B_2 be marked on the ray AB, the points C_1, C_2 on the ray AC, and the points A, B, C do not lie on one straight line. If $B_1C_1 \parallel B_2C_2$, then $\frac{AB_1}{B_1B_2} = \frac{AC_1}{C_1C_2}$.
The truth of this statement immediately follows from the similarity between $\triangle AB_1C_1$ and $\triangle AB_2C_2$. Thus, if we construct a triangle similar to the required one, then we will need to make a construction that implements a homothety centered at one of the vertices of this triangle with a coefficient equal to the ratio of the constructed segment (in problem 3 – the radius of the inscribed circle, in problem 4 – the perimeter) to the one given by condition.

Explaining solution of the task 3.
Let's put a segment of an arbitrary length (we denote it by x) on an arbitrary straight line. Let's put

on this straight line segments of length $4x, 5x, 7x$ – sides of a triangle similar to the required one; it exists because $4x + 5x > 7x$. Then we construct circles with centers at the ends A and B of a segment of length $7x$ and radii $4x$ and $5x$, respectively. We call one of the intersection points of these circles C – thus, $\triangle ABC$ is constructed similar to the required one.
Let's construct a circle inscribed in it: for that we draw the bisectors of its two corners; the point of their intersection is the center of the circle, from which we drop the perpendicular to one of the sides of the triangle; its length is the radius of the circle.
then we put on an arbitrary straight line the segment KL equal to the radius of the circle inscribed in $\triangle ABC$ and the segment LM equal to the one specified in the condition (the point L is located between points K and M). Set aside an arbitrary ray KP that does not lie on the straight line KM, and on this ray there is a segment KT equal to $AC = 4x$. Draw the line LT and the line $MS \parallel LT$: the segment TS is equal to the side A_1C_1 of the required triangle. by dividing this side into 4 equal segments we get the segment $y = \frac{1}{4}TS$. Triangle with sides $4y, 5y, 7y$ is the required one.

Solution (RUS). *Разбор варианта №2.*
Сначала отложим на произвольной прямой отрезок заданной длины (обозначим ее за x). Проведем окружности радиуса x с центрами в концах этого отрезка – они пересекутся в двух точках, каждая из которых вместе с концами исходного отрезка образует тройку вершин равностороннего треугольника. Разделим пополам одну из сторон этого треугольника и соединим ее центр с противоположной вершиной – получим треугольник, гипотенуза которого равна заданному отрезку, а отношение катетов равно $\operatorname{tg} 60^\circ = \sqrt{3}$.

Комментарий. В решении задач 3 и 4 задействуется алгоритм построения треугольника, подобного исходному. Этот алгоритм базируется на следующем:
Пусть на луче AB отмечены точки B_1, B_2, на луче AC – точки C_1, C_2, причем точки A, B, C не лежат на одной прямой. Если $B_1C_1 \parallel B_2C_2$, то $\frac{AB_1}{B_1B_2} = \frac{AC_1}{C_1C_2}$.
Истинность этого утверждения немедленно следует из подобия $\triangle AB_1C_1$ и $\triangle AB_2C_2$.
Таким образом, если мы построим треугольник, подобный требуемому, то далее потребуется произвести построение, реализующее гомотетию с центром в одной из вершин этого треугольника с коэффициентом, равным отношению построенного отрезка (в задаче 3 – радиуса вписанной окружности, в задаче 4 – периметра) к заданному по условию.

Разбор варианта №3.
Отложим на произвольной прямой отрезок произвольной длины (обозначим эту длину за x). Отложим на этой прямой отрезки длины $4x, 5x, 7x$ – стороны треугольника, подобного требуемому; он существует, поскольку $4x + 5x > 7x$. Построим окружности с центрами в концах A и B отрезка длиной $7x$ и радиусами $4x$ и $5x$ соответственно. Одну из точек пересечения этих окружностей назовем C – таким образом, построен $\triangle ABC$, подобный требуемому.
Построим окружность, вписанную в него: для этого проведем биссектрисы двух его углов; точка их пересечения – центр окружности, из которой опустим перпендикуляр к одной из сторон треугольника; его длина – радиус окружности.
Отложим на произвольной прямой отрезок KL, равный радиусу окружности, вписанной в $\triangle ABC$, и отрезок LM, равный заданному в условии (точка L расположена между точками K и M). Отложим произвольный луч KP, не лежащий на прямой KM, и на этом луче – отрезок KT, равный $AC = 4x$. Проведем прямую LT и прямую $MS \parallel LT$: отрезок TS равен стороне A_1C_1 требуемого треугольника. Разделим эту сторону на 4 равных отрезка – получим отрезок $y = \frac{1}{4}TS$. Треугольник со сторонами $4y, 5y, 7y$ – требуемый.

Task 6.

1. Решите для положительных $x_1, x_2, \ldots, x_{2021}$:

$$\begin{cases} 2x_1 + \frac{18}{x_2} = 12 - (x_1 - 2x_2 + x_{2021})^2 \\ 2x_2 + \frac{18}{x_3} = 12 - (x_2 - 2x_3 + x_1)^2 \\ 2x_3 + \frac{18}{x_4} = 12 - (x_3 - 2x_4 + x_2)^2 \\ \ldots \\ 2x_{2020} + \frac{18}{x_{2021}} = 12 - (x_{2020} - 2x_{2021} + x_{2019})^2 \\ 2x_{2021} + \frac{18}{x_1} = 12 - (x_{2021} - 2x_1 + x_{2020})^2 \end{cases}$$

Solve for positive $x_1, x_2, \ldots, x_{2021}$:

$$\begin{cases} 2x_1 + \frac{18}{x_2} = 12 - (x_1 - 2x_2 + x_{2021})^2 \\ 2x_2 + \frac{18}{x_3} = 12 - (x_2 - 2x_3 + x_1)^2 \\ 2x_3 + \frac{18}{x_4} = 12 - (x_3 - 2x_4 + x_2)^2 \\ \ldots \\ 2x_{2020} + \frac{18}{x_{2021}} = 12 - (x_{2020} - 2x_{2021} + x_{2019})^2 \\ 2x_{2021} + \frac{18}{x_1} = 12 - (x_{2021} - 2x_1 + x_{2020})^2 \end{cases}$$

Answer: $x_1 = x_2 = \cdots = x_{2021} = 3$

2. Решите для положительных $x_1, x_2, \ldots, x_{2021}$:

$$\begin{cases} 3x_1 + \frac{75}{x_2} = 30 - (x_1 - 2x_2 + x_{2021})^2 \\ 3x_2 + \frac{75}{x_3} = 30 - (x_2 - 2x_3 + x_1)^2 \\ 3x_3 + \frac{75}{x_4} = 30 - (x_3 - 2x_4 + x_2)^2 \\ \ldots \\ 3x_{2020} + \frac{75}{x_{2021}} = 30 - (x_{2020} - 2x_{2021} + x_{2019})^2 \\ 3x_{2021} + \frac{75}{x_1} = 30 - (x_{2021} - 2x_1 + x_{2020})^2 \end{cases}$$

Solve for positive $x_1, x_2, \ldots, x_{2021}$:

$$\begin{cases} 3x_1 + \frac{75}{x_2} = 30 - (x_1 - 2x_2 + x_{2021})^2 \\ 3x_2 + \frac{75}{x_3} = 30 - (x_2 - 2x_3 + x_1)^2 \\ 3x_3 + \frac{75}{x_4} = 30 - (x_3 - 2x_4 + x_2)^2 \\ \ldots \\ 3x_{2020} + \frac{75}{x_{2021}} = 30 - (x_{2020} - 2x_{2021} + x_{2019})^2 \\ 3x_{2021} + \frac{75}{x_1} = 30 - (x_{2021} - 2x_1 + x_{2020})^2 \end{cases}$$

Answer: $x_1 = x_2 = \cdots = x_{2021} = 5$

3. Решите для положительных $x_1, x_2, \ldots, x_{2021}$:

$$\begin{cases} 5x_1 + \frac{20}{x_2} = 20 - (x_1 - 2x_2 + x_{2021})^2 \\ 5x_2 + \frac{20}{x_3} = 20 - (x_2 - 2x_3 + x_1)^2 \\ 5x_3 + \frac{20}{x_4} = 20 - (x_3 - 2x_4 + x_2)^2 \\ \ldots \\ 5x_{2020} + \frac{20}{x_{2021}} = 20 - (x_{2020} - 2x_{2021} + x_{2019})^2 \\ 5x_{2021} + \frac{20}{x_1} = 20 - (x_{2021} - 2x_1 + x_{2020})^2 \end{cases}$$

Solve for positive $x_1, x_2, \ldots, x_{2021}$:

$$\begin{cases} 5x_1 + \frac{20}{x_2} = 20 - (x_1 - 2x_2 + x_{2021})^2 \\ 5x_2 + \frac{20}{x_3} = 20 - (x_2 - 2x_3 + x_1)^2 \\ 5x_3 + \frac{20}{x_4} = 20 - (x_3 - 2x_4 + x_2)^2 \\ \ldots \\ 5x_{2020} + \frac{20}{x_{2021}} = 20 - (x_{2020} - 2x_{2021} + x_{2019})^2 \\ 5x_{2021} + \frac{20}{x_1} = 20 - (x_{2021} - 2x_1 + x_{2020})^2 \end{cases}$$

Answer: $x_1 = x_2 = \cdots = x_{2021} = 2$

4. Решите для положительных $x_1, x_2, \ldots, x_{2021}$:

$$\begin{cases} 7x_1 + \frac{28}{x_2} = 28 - (x_1 - 2x_2 + x_{2021})^2 \\ 7x_2 + \frac{28}{x_3} = 28 - (x_2 - 2x_3 + x_1)^2 \\ 7x_3 + \frac{28}{x_4} = 28 - (x_3 - 2x_4 + x_2)^2 \\ \ldots \\ 7x_{2020} + \frac{28}{x_{2021}} = 28 - (x_{2020} - 2x_{2021} + x_{2019})^2 \\ 7x_{2021} + \frac{28}{x_1} = 28 - (x_{2021} - 2x_1 + x_{2020})^2 \end{cases}$$

Solve for positive $x_1, x_2, \ldots, x_{2021}$:

$$\begin{cases} 7x_1 + \frac{28}{x_2} = 28 - (x_1 - 2x_2 + x_{2021})^2 \\ 7x_2 + \frac{28}{x_3} = 28 - (x_2 - 2x_3 + x_1)^2 \\ 7x_3 + \frac{28}{x_4} = 28 - (x_3 - 2x_4 + x_2)^2 \\ \ldots \\ 7x_{2020} + \frac{28}{x_{2021}} = 28 - (x_{2020} - 2x_{2021} + x_{2019})^2 \\ 7x_{2021} + \frac{28}{x_1} = 28 - (x_{2021} - 2x_1 + x_{2020})^2 \end{cases}$$

Answer: $x_1 = x_2 = \cdots = x_{2021} = 2$

Solution (ENG). *Explaining the solution of the 1st version of the task, the others are solved similarly.*
According to the Cauchy inequality, $ax + \frac{b}{x} \geq 2\sqrt{ab}$ holds for positive a, b, and the equality holds for $x = \sqrt{\frac{b}{a}}$. Thus, $2t + \frac{18}{t} \geq 12$ and equality holds for $t = 3$.
By adding the equations of the original system we get

$$2x_1 + \frac{18}{x_1} + 2x_2 + \frac{18}{x_2} + \cdots + 2x_{2021} + \frac{18}{x_{2021}} = 12 \cdot 2021 - A$$

, while $A = (x_1 - 2x_2 + x_{2021})^2 + (x_2 - 2x_3 + x_1)^2 + \cdots + (x_{2021} - 2x_1 + x_{2020})^2$ with $A \geq 0$.
The left side of the obtained equality is not less than $12 \cdot 2021$ according to the Cauchy inequality, and the right side is not more than $12 \cdot 2021$. This means that to achieve equality we need $x_1 = x_2 = \cdots = x_{2021} = 3$, which gives $A = 0$. It is easy to verify that the specified variable values are appropriate.

If (while the rest of the reasoning is correct) it is not said that $A = 0$ with $x_1 = \cdots = x_{2021} = 3$, then 1 point is subtracted from the result.

Solution (RUS). *Разбор варианта №1, остальные решаются аналогично.*
Согласно неравенству Коши, для положительных a, b выполнено $ax + \frac{b}{x} \geq 2\sqrt{ab}$, причем равенство достигается при $x = \sqrt{\frac{b}{a}}$. Значит, $2t + \frac{18}{t} \geq 12$ и равенство достигается при $t = 3$.
Складывая уравнения исходной системы, получим

$$2x_1 + \frac{18}{x_1} + 2x_2 + \frac{18}{x_2} + \cdots + 2x_{2021} + \frac{18}{x_{2021}} = 12 \cdot 2021 - A$$

, где $A = (x_1 - 2x_2 + x_{2021})^2 + (x_2 - 2x_3 + x_1)^2 + \cdots + (x_{2021} - 2x_1 + x_{2020})^2$, т.е. $A \geq 0$.
Левая часть полученного равенства не меньше $12 \cdot 2021$ согласно неравенству Коши, а правая – не больше $12 \cdot 2021$. Значит, для достижения равенства необходимо $x_1 = x_2 = \cdots = x_{2021} = 3$, что дает $A = 0$. Легко убедиться, что указанные значения переменных подходят.

Если при верности остальных рассуждений не указано, что $A = 0$ при $x_1 = \cdots = x_{2021} = 3$, то снимается 1 балл.

2-й отборочный тур / 2nd qualifying round

7-й класс / 7th degree

Task 7.

1. Найти количество пар $(x; y)$ натуральных чисел, удовлетворяющих равенству

$$x + y = gcd(x, y) + 6$$

Здесь $gcd(x, y)$ – наибольший общий делитель x и y.
Если $x \neq y$, то пары $(x; y)$ и $(y; x)$ считаются различными.

Find the number of ordered pairs $(x; y)$ of positive integers satisfying

$$x + y = gcd(x, y) + 6$$

Here $gcd(x, y)$ is a greatest common divisor of x and y.
If $x \neq y$ then pairs $(x; y)$ and $(y; x)$ are considered to be different.

Answer: 11

2. Найти количество пар $(x; y)$ натуральных чисел, удовлетворяющих равенству

$$x + y = gcd(x, y) + 8$$

Здесь $gcd(x, y)$ – наибольший общий делитель x и y.
Если $x \neq y$, то пары $(x; y)$ и $(y; x)$ считаются различными.

Find the number of ordered pairs $(x; y)$ of positive integers satisfying

$$x + y = gcd(x, y) + 8$$

Here $gcd(x, y)$ is a greatest common divisor of x and y.
If $x \neq y$ then pairs $(x; y)$ and $(y; x)$ are considered to be different.

Answer: 13

3. Найти количество пар $(x; y)$ натуральных чисел, удовлетворяющих равенству

$$x + y = gcd(x, y) + 10$$

Здесь $gcd(x, y)$ – наибольший общий делитель x и y.
Если $x \neq y$, то пары $(x; y)$ и $(y; x)$ считаются различными.

Find the number of ordered pairs $(x; y)$ of positive integers satisfying

$$x + y = gcd(x, y) + 10$$

Here $gcd(x, y)$ is a greatest common divisor of x and y.
If $x \neq y$ then pairs $(x; y)$ and $(y; x)$ are considered to be different.

Answer: 15

4. Найти количество пар $(x; y)$ натуральных чисел, удовлетворяющих равенству

$$x + y = gcd(x, y) + 12$$

Здесь $gcd(x, y)$ – наибольший общий делитель x и y.
Если $x \neq y$, то пары $(x; y)$ и $(y; x)$ считаются различными.

Find the number of ordered pairs $(x; y)$ of positive integers satisfying

$$x + y = gcd(x, y) + 12$$

Here $gcd(x, y)$ is a greatest common divisor of x and y.
If $x \neq y$ then pairs $(x; y)$ and $(y; x)$ are considered to be different.

Answer: 27

Solution (ENG). *Explaining the solution of the task 1, others are being solved similarly.*
Let $x = ad, y = bd$ with $d = gcd(x, y)$. Initial equation will transform to $d(a + b - 1) = 6$ while $gcd(a, b) = 1$. The numbers d и $a + b - 1$ are positive integers with their product being equal to 6, then all possible values of d are 1, 2, 3 or 6.
First case gives us $a + b - 1 = 6 \Rightarrow a + b = 7$, then we have 6 pairs (a, b).
By the second case, $a + b = 4$ and we have two pairs or relatively prime (a, b): $(1, 3)$ and $(3, 1)$.
Case $d = 3$ gives us $a + b = 3$ and two another pairs (a, b).
At last from $d = 6$ we get $a + b = 2$ and one more pair (a, b).
So, we've got 11 pairs (a, b) with every one of them gives us one pair of (x, y) satisfying initial equation.

Solution (RUS). *Разбор варианта 1, остальные решаются аналогично.*
Пусть $x = ad, y = bd$, где $d = gcd(x, y)$. Уравнение примет вид $d(a+b-1) = 6$, причем $gcd(a, b) = 1$. Числа d и $a+b-1$ – натуральные, их произведение равно 6, отсюда возможные значения d – либо 1, либо 2, либо 3, либо 6.
В первом случае $a + b - 1 = 6 \Rightarrow a + b = 7$, что дает 6 пар (a, b).
Во втором случае $a + b = 4$, что дает две пары взаимно простых (a, b): $(1, 3)$ и $(3, 1)$.
Случай $d = 3$ дает $a + b = 3$ и еще две пары (a, b).
Наконец, при $d = 6$ имеем $a + b = 2$ и еще одну пару (a, b).
Итого получили 11 пар (a, b), каждая из которых дает одну пару (x, y), удовлетворяющую исходному уравнению.

Task 8.

1. Есть лист бумаги с нарисованной сеткой 10×10 квадратных клеток. Сколько можно нарисовать попарно несовпадающих квадратов, все стороны которых лежат на линиях сетки? Квадраты могут пересекаться друг с другом.

   There is a sheet of paper with a grid of 10×10 squares drawn. Find number of ways to select pairwise mismatched squares on this sheet with their sides lying on the grid. The squares may intersect with some other ones.

   Answer: 385

2. Есть лист бумаги с нарисованной сеткой 12×12 квадратных клеток. Сколько можно нарисовать попарно несовпадающих квадратов, все стороны которых лежат на линиях сетки? Квадраты могут пересекаться друг с другом.

There is a sheet of paper with a grid of 12×12 squares drawn. Find number of ways to select pairwise mismatched squares on this sheet with their sides lying on the grid. The squares may intersect with some other ones.

Answer: 650

3. Есть лист бумаги с нарисованной сеткой 15×15 квадратных клеток. Сколько можно нарисовать попарно несовпадающих квадратов, все стороны которых лежат на линиях сетки? Квадраты могут пересекаться друг с другом.

   There is a sheet of paper with a grid of 15×15 squares drawn. Find number of ways to select pairwise mismatched squares on this sheet with their sides lying on the grid. The squares may intersect with some other ones.

   Answer: 1240

4. Есть лист бумаги с нарисованной сеткой 19×19 квадратных клеток. Сколько можно нарисовать попарно несовпадающих квадратов, все стороны которых лежат на линиях сетки? Квадраты могут пересекаться друг с другом.

   There is a sheet of paper with a grid of 19×19 squares drawn. Find number of ways to select pairwise mismatched squares on this sheet with their sides lying on the grid. The squares may intersect with some other ones.

   Answer: 2470

Solution (ENG). *Explaining the solution of the task 1, others are being solved similarly.*
Obviously, there are exactly 10^2 squares of the size 1×1. Then each of 2×2 squares is uniquely defined by its lower left square 1×1 which can be selected in 9^2 ways (squares from the «top» and «right» layers of the grid do not fit). Further, similarly: the square 3×3 is selected in 8^2 ways, etc., the square 10×10 is selected in the $1^2 = 1$ way. Total $1^2 + 2^2 + \cdots + 9^2 + 10^2$ ways to select a square on a given grid.
Let's prove by induction on n that $1^2 + 2^2 + \cdots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$ for evere positive integer n.
Base of induction ($n = 1$): $1^2 = \frac{1\cdot(1+1)\cdot(2+1)}{6}$ – true.
Step of induction: let $1^2 + 2^2 + \cdots + k^2 = \frac{k(k+1)(2k+1)}{6}$ for some positive integer k. Let's prove that $1^2+2^2+\cdots+k^2+(k+1)^2 = \frac{(k+1)(k+2)(2(k+1)+1)}{6}$. We have $1^2+2^2+\cdots+k^2+(k+1)^2 = \frac{k(k+1)(2k+1)}{6}+(k+1)^2 = \frac{k+1}{6} \cdot (2k^2 + k + 6(k+1)) = \frac{k+1}{6} \cdot (k+2)(2k+3)$, Q.E.D.
So, $1^2 + 2^2 + \cdots + 9^2 + 10^2 = \frac{10\cdot 11\cdot 21}{6} = 385$.

Solution (RUS). *Разбор варианта 1, остальные решаются аналогично.*
Очевидно, квадратов 1×1 ровно 10^2 штук. Каждый квадрат 2×2 однозначно задается своим нижним левым квадратом 1×1, который можно выбрать 9^2 способами (квадраты из «верхнего» и «правого» слоев не подходят). Далее аналогично: квадрат 3×3 выбирается 8^2 способами и т.д., квадрат 10×10 выбирается $1^2 = 1$ способом. Итого $1^2+2^2+\cdots+9^2+10^2$ способов выбрать квадрат на заданной сетке.
Докажем индукцией по n, что $1^2 + 2^2 + \cdots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$ для любого натурального n.
База индукции ($n = 1$): $1^2 = \frac{1\cdot(1+1)\cdot(2+1)}{6}$ – верное равенство.
Шаг индукции: пусть $1^2+2^2+\cdots+k^2 = \frac{k(k+1)(2k+1)}{6}$ для натурального k. Докажем, что $1^2+2^2+\cdots+k^2+(k+1)^2 = \frac{(k+1)(k+2)(2(k+1)+1)}{6}$. Действительно, $1^2+2^2+\cdots+k^2+(k+1)^2 = \frac{k(k+1)(2k+1)}{6}+(k+1)^2 =$

$\frac{k+1}{6} \cdot (2k^2 + k + 6(k+1)) = \frac{k+1}{6} \cdot (k+2)(2k+3)$, что и требовалось доказать.
Значит, $1^2 + 2^2 + \cdots + 9^2 + 10^2 = \frac{10 \cdot 11 \cdot 21}{6} = 385$.

Task 9.

1. Последовательность натуральных чисел $a_1, a_2, a_3, \ldots$ строится следующим образом: число a_1 выбирается из чисел от 1 до 999999, а каждое следующее число строится по предыдущему: если a_n – чётное, то $a_{n+1} = \frac{a_n}{2}$; если a_n – нечётное, то $a_{n+1} = a_n + 1$; если $a_n = 1$, то последовательность не продолжается.
   Какова наибольшая возможная длина этой последовательности?

   The sequence of positive integers $a_1, a_2, a_3, \ldots$ is constructed as follows: the number a_1 is selected from numbers from 1 to 999999, then every next number is constructed from to the previous one: if a_n is even, then $a_{n+1} = \frac{a_n}{2}$; if a_n is odd, then $a_{n+1} = a_n + 1$; if $a_n = 1$, then the sequence does not continue.
   What is the greatest possible length of this sequence?

   Answer: 39

2. Последовательность натуральных чисел $a_1, a_2, a_3, \ldots$ строится следующим образом: число a_1 выбирается из чисел от 1 до 1100011, а каждое следующее число строится по предыдущему: если a_n – чётное, то $a_{n+1} = \frac{a_n}{2}$; если a_n – нечётное, то $a_{n+1} = a_n + 1$; если $a_n = 1$, то последовательность не продолжается.
   Какова наибольшая возможная длина этой последовательности?

   The sequence of positive integers $a_1, a_2, a_3, \ldots$ is constructed as follows: the number a_1 is selected from numbers from 1 to 1100011, then every next number is constructed from to the previous one: if a_n is even, then $a_{n+1} = \frac{a_n}{2}$; if a_n is odd, then $a_{n+1} = a_n + 1$; if $a_n = 1$, then the sequence does not continue.
   What is the greatest possible length of this sequence?

   Answer: 41

3. Последовательность натуральных чисел $a_1, a_2, a_3, \ldots$ строится следующим образом: число a_1 выбирается из чисел от 1 до 505050, а каждое следующее число строится по предыдущему: если a_n – чётное, то $a_{n+1} = \frac{a_n}{2}$; если a_n – нечётное, то $a_{n+1} = a_n + 1$; если $a_n = 1$, то последовательность не продолжается.
   Какова наибольшая возможная длина этой последовательности?

   The sequence of positive integers $a_1, a_2, a_3, \ldots$ is constructed as follows: the number a_1 is selected from numbers from 1 to 505050, then every next number is constructed from to the previous one: if a_n is even, then $a_{n+1} = \frac{a_n}{2}$; if a_n is odd, then $a_{n+1} = a_n + 1$; if $a_n = 1$, then the sequence does not continue.
   What is the greatest possible length of this sequence?

   Answer: 37

4. Последовательность натуральных чисел $a_1, a_2, a_3, \ldots$ строится следующим образом: число a_1 выбирается из чисел от 1 до 2121212, а каждое следующее число строится по предыдущему: если a_n – чётное, то $a_{n+1} = \frac{a_n}{2}$; если a_n – нечётное, то $a_{n+1} = a_n + 1$; если $a_n = 1$, то последовательность не продолжается.

Какова наибольшая возможная длина этой последовательности?

The sequence of positive integers $a_1, a_2, a_3, \dots$ is constructed as follows: the number a_1 is selected from numbers from 1 to 2121212, then every next number is constructed from to the previous one: if a_n is even, then $a_{n+1} = \frac{a_n}{2}$; if a_n is odd, then $a_{n+1} = a_n + 1$; if $a_n = 1$, then the sequence does not continue.
What is the greatest possible length of this sequence?

Answer: 43

Solution (ENG). *Explaining the solution of the task 1, others are being solved similarly.*
Let's move on to the binary number system. Dividing an even number by 2 means discarding the last zero in its notation, and adding 1 to an odd number replaces the block of ones, starting with the least significant bit and going up to the first zero digit (or until the end of the number, if it originally consisted of only ones), by a block of zeros prefixed with one.
The number of digits in a number changes only if the number consisted of only ones – then after adding 1 it becomes a power of two. Let us prove that the addition of one with an increase in the number of digits must occur at least once when constructing a sequence starting with a_1 that is not equal to a power of two. This will mean that it will happen exactly once, because if at some point a power of two becomes a member of the sequence, then all that remains is to divide by 2 (discard zeros).
Suppose the opposite: let such an increase in the number of digits not happen. Then all operations of adding ones do not lead to an increase in the number of digits, at least one of two consecutive operations will drop zero – this means that if the initial number of digits in the binary notation a_1 is equal to m, then in no more than $2(m-1)$ steps we get the number 1 (the only non-zero number, consisting of one digit in binary notation). But 1 can only be obtained from the number 2, which is a power of two, which could not be obtained by adding one – which means that it is obtained by division. Let, before getting the number 1, k of the last operations were division by 2 (but not $k+1$ operations). Then the $(k+1)$ -th operation from the end was the addition of 1 to a number consisting of only ones – a contradiction with the assumption.
It turns out that if the binary notation a_1 (which is not a power of two) contained m digits, then when constructing the sequence, one operation of assigning one and m operations of division by 2 will occur, the remaining operations are adding one to an odd number. Note that with such operations, each time the last unit is shifted at least 1 position closer to the most significant bit, which means that the operations of adding 1 can occur no more than $m-1$ times (including the one that increase number of digits by 1). Thus, the maximum number of operations for a number of m digits does not exceed $(m-2)+1+m = 2m-1$.
The number 999999 has 20 digits in its binary representation, because $2^{19} < 999999 < 2^{20} = 1048576$. Hence, the notation of a_1 consists of no more than 20 digits, and the length of the sequence does not exceed $2 \cdot 20 - 1 = 39$. It is easy to verify that $a_1 = 2^{19} + 1 = 524289$ gives an example of a sequence of length 39.

Solution (RUS). *Разбор варианта 1, остальные решаются аналогично.*
Перейдем к двоичной системе счисления. Деление четного числа на 2 означает отбрасывание последнего нуля в записи числа, а прибавление к нечетному числу единицы заменяет блок из единиц, начинающийся с младшего разряда и идущий до первой нулевой цифры (либо до конца числа, если оно изначально состояло только из единиц), на блок нулей с приписыванием перед ними единицы.
Количество цифр в числе меняется только в случае, если число состояло из одних единиц – тогда после прибавления 1 оно становится степенью двойки. Докажем, что прибавление единицы с увеличением числа разрядов должно хотя бы раз произойти при построении последовательности, начинающейся с a_1, не равного степени двойки. Это будет означать, что оно случится ровно один

раз, потому что если в какой-то момент членом последовательности становится степень двойки, то после этого остается только делить на 2 (отбрасывать нули).
Предположим противное: пусть такого увеличения числа разрядов не случится. Тогда все операции прибавления единиц не приводят к увеличеснию количества разрядов, не менее одной из двух подряд идущих операций будет отбрасывание нуля – значит, если изначальное количество цифр в двоичной записи a_1 равно m, то не более чем за $2(m-1)$ шагов мы получим число 1 (единственное ненулевое число, состоящее из одной цифры в двоичной записи). Но 1 можно получить только из числа 2, которое является степенью двойки, которая не могла быть получена прибавлением единицы – значит, она получена делением. Пусть до получения числа 1 k последних операций были делением на 2 (но не $k+1$ операций). Тогда $(k+1)$-я с конца операция была прибавлением 1 к числу, состоящему из одних единиц – противоречие с предположением.
Получается, если двоичная запись a_1 (не являющегося степенью двойки) содержала m цифр, то при построении последовательности случится одна операция приписывания единицы и m операций деления на 2, остальные операции – прибавление единицы к нечетному числу. Заметим, что при таких операциях каждый раз последняя единица сдвигается как минимум на 1 позицию ближе к старшему разряду – значит, операции прибавления 1 могут произойти не более $m-1$ раз (из них одна – уже учтенная операция с увеличением числа разрядов). Таким образом, максимальное количество операций для числа из m разрядов не превосходит $(m-2)+1+m=2m-1$.
Число 999999 имеет в своей двоичной записи 20 цифр, поскольку $2^{19} < 999999 < 2^{20} = 1048576$. Значит, запись a_1 состоит не более чем из 20 цифр, и длина последовательности не превосходит $2 \cdot 20 - 1 = 39$. Нетрудно убедиться в том, что $a_1 = 2^{19} + 1 = 524289$ дает пример последовательности длины 39.

Task 10.

1. Дан правильный 2021-угольник (все его стороны равны, все углы тоже равны) $A_1A_2A_3 \ldots A_{2020}A_{2021}$. Точки B и C – середины сторон $A_{1846}A_{1847}$ и $A_{1842}A_{1843}$ соответственно. Найдите меньший из углов между прямыми A_1B и $A_{2018}C$, ответ дайте в градусах, при необходимости округлив до сотых.

   There is a regular polygon (all sides are equal, all angles are also equal to each other) with 2021 sides named $A_1A_2A_3 \ldots A_{2020}A_{2021}$. Points B and C are located at the centers of the sides $A_{1846}A_{1847}$ and $A_{1842}A_{1843}$ respectively. Find smaller angle between the lines A_1B and $A_{2018}C$ and give your answer in degrees rounded to two decimals, if needed.

   Answer: 0.71

2. Дан правильный 2021-угольник (все его стороны равны, все углы тоже равны) $A_1A_2A_3 \ldots A_{2020}A_{2021}$. Точки B и C – середины сторон $A_{1261}A_{1262}$ и $A_{1799}A_{1800}$ соответственно. Найдите меньший из углов между прямыми A_1B и $A_{538}C$, ответ дайте в градусах, при необходимости округлив до сотых.

   There is a regular polygon (all sides are equal, all angles are also equal to each other) with 2021 sides named $A_1A_2A_3 \ldots A_{2020}A_{2021}$. Points B and C are located at the centers of the sides $A_{1261}A_{1262}$ and $A_{1799}A_{1800}$ respectively. Find smaller angle between the lines A_1B and $A_{538}C$ and give your answer in degrees rounded to two decimals, if needed.

   Answer: 84.17

3. Дан правильный 2021-угольник (все его стороны равны, все углы тоже равны) $A_1A_2A_3 \ldots A_{2020}A_{2021}$. Точки B и C – середины сторон $A_{964}A_{965}$ и $A_{57}A_{58}$ соответственно.

Найдите меньший из углов между прямыми A_1B и $A_{1115}C$, ответ дайте в градусах, при необходимости округлив до сотых.

There is a regular polygon (all sides are equal, all angles are also equal to each other) with 2021 sides named $A_1A_2A_3\dots A_{2020}A_{2021}$. Points B and C are located at the centers of the sides $A_{964}A_{965}$ and $A_{57}A_{58}$ respectively. Find smaller angle between the lines A_1B and $A_{1115}C$ and give your answer in degrees rounded to two decimals, if needed.

Answer: 18.44

4. Дан правильный 2021-угольник (все его стороны равны, все углы тоже равны) $A_1A_2A_3\dots A_{2020}A_{2021}$. Точки B и C – середины сторон $A_{2000}A_{2001}$ и $A_{34}A_{35}$ соответственно. Найдите меньший из углов между прямыми A_1B и $A_{55}C$, ответ дайте в градусах, при необходимости округлив до сотых.

   There is a regular polygon (all sides are equal, all angles are also equal to each other) with 2021 sides named $A_1A_2A_3\dots A_{2020}A_{2021}$. Points B and C are located at the centers of the sides $A_{2000}A_{2001}$ and $A_{34}A_{35}$ respectively. Find smaller angle between the lines A_1B and $A_{55}C$ and give your answer in degrees rounded to two decimals, if needed.

   Answer: 9.80

Solution (ENG). *Explaining the solution of the task 1, others are being solved similarly.*
Let point O be the center of the polygon $A_1A_2A_3\dots A_{2020}A_{2021}$. Segments $OA_1, OA_2, \dots, OA_{2021}$ divide the polygon into isosceles triangles equal to each other with an angle $\alpha = \frac{360^\circ}{2021}$ being opposite to their bases.
Notice that when the polygon is rotated around the point O by an angle 4α, the line A_1B will turn into $A_{2018}C$ – thus, the angle between these lines is $4\alpha = \frac{4\cdot 360^\circ}{2021} \approx 0.71^\circ$.

Solution (RUS). *Разбор варианта 1, остальные решаются аналогично.*
Пусть точка O – центр многоугольника $A_1A_2A_3\dots A_{2020}A_{2021}$. Проведем отрезки $OA_1, OA_2, \dots, OA_{2021}$ – они поделят многоугольник на равные друг другу равнобедренные треугольники, угол при вершинах которых равен $\alpha = \frac{360^\circ}{2021}$.
Заметим, что при повороте многоугольника вокруг точки O на угол 4α прямая A_1B перейдет в $A_{2018}C$ – значит, угол между этими прямыми равен $4\alpha = \frac{4\cdot 360^\circ}{2021} \approx 0.71^\circ$.

Task 11.

1. Сравните числа 26^{47} и 11^{71}.

   Which number is greater: 26^{47} or 11^{71}?

   Answer: $26^{47} < 11^{71}$

2. Сравните числа 26^{53} и 11^{80}.

   Which number is greater: 26^{53} or 11^{80}?

   Answer: $26^{53} < 11^{80}$

3. Сравните числа 26^{83} и 11^{125}.

   Which number is greater: 26^{83} or 11^{125}?

   Answer: $26^{83} < 11^{125}$

4. Сравните числа 26^{67} и 11^{101}.

   Which number is greater: 26^{67} or 11^{101}?

   Answer: $26^{67} < 11^{101}$

Solution (ENG). *Explaining the solution of the task 1, others are being solved similarly.* Obviously $26^{47} < 27^{47} = 3^{141}$ and $11^{71} > 9^{71} = 3^{142}$. Thus, we have $26^{47} < 3^{141} < 3^{142} < 11^{71}$ which gives us $26^{47} < 11^{71}$.
A common mistake when solving such problems can occur while rounding a number – it is important to understand in which direction we round it: for example, when comparing the numbers 11^6 and 999999, you can use the transitivity of inequalities, since $11^6 > 10^6 > 999999$, i.e. we have reduced the larger number. If we, for example, decrease a smaller number, then the resulting output does not lead to the correct answer. If we do not know in which direction we've rounded, then the conclusions obtained are all the more useless.

Solution (RUS). *Разбор варианта 1, остальные решаются аналогично.* Очевидно, $26^{47} < 27^{47} = 3^{141}$ и $11^{71} > 9^{71} = 3^{142}$. Имеем $26^{47} < 3^{141} < 3^{142} < 11^{71}$, что дает $26^{47} < 11^{71}$.
Распространенная ошибка при решении подобных задач может возникнуть при округлении – важно понимать, в какую сторону оно происходит: например, при сравнении чисел 11^6 и 999999 можно воспользоваться транзитивностью неравенств, поскольку $11^6 > 10^6 > 999999$, т.е. мы уменьшили большее число. Если же мы, к примеру, уменьшаем меньшее число, то получаемый вывод не приводит к верному ответу. Если мы не знаем, в какую сторону округлили, то полученные выводы тем более бесполезны.

Task 12.

1. Найдите цифру, стоящую в разряде сотен десятичной записи числа $5^{4^{3^{2^{7}}}}$.

   Find the third digit (from the right) of the decimal notation of the number $5^{4^{3^{2^{7}}}}$.

   Answer: 6

2. Найдите цифру, стоящую в разряде сотен десятичной записи числа $5^{3^{4^{2^{6}}}}$.

   Find the third digit (from the right) of the decimal notation of the number $5^{3^{4^{2^{6}}}}$.

   Answer: 1

3. Найдите цифру, стоящую в разряде сотен десятичной записи числа $5^{6^{7^{8^{9}}}}$.

   Find the third digit (from the right) of the decimal notation of the number $5^{6^{7^{8^{9}}}}$.

Answer: 6

4. Найдите цифру, стоящую в разряде сотен десятичной записи числа $5^{9^{8^{7^6}}}$.

   Find the third digit (from the right) of the decimal notation of the number $5^{9^{8^{7^6}}}$.

Answer: 1

Solution (ENG). *Explaining the solution of the task 1, others are being solved similarly.* Let's look at the last 3 digits in decimal notation of 5^n:

n	1	2	3	4	5	6	7
$5^n \pmod{1000}$	005	025	125	625	125	625	125

$125 \cdot 5 = 625$, $625 \cdot 5 = 3125 \equiv 125 \pmod{1000}$ – thus, with $n > 2$ we have $5^n \equiv 125 \pmod{1000}$ for odd positive integers n, and $5^n \equiv 625 \pmod{1000}$ for even positive integers n.
By that, the 3rd digit in decimal notation of 5^n depends only on parity of n. Notice that 4^m is even for all positive integers m – thus, 5^{4^m} (also with $m = 3^{2^7}$ as it is in the task's formulation) ends by 625 which gives us digit 6 as the answer.
Note that $a^{b^c} \neq (a^b)^c = a^{bc}$. True equality is $a^{b^c} = a^{(b^c)}$.

Solution (RUS). *Разбор варианта 1, остальные решаются аналогично.*
Рассмотрим последние три цифры в записи чисел 5^n:

n	1	2	3	4	5	6	7
$5^n \pmod{1000}$	005	025	125	625	125	625	125

$125 \cdot 5 = 625$, $625 \cdot 5 = 3125 \equiv 125 \pmod{1000}$ – значит, при $n > 2$: $5^n \equiv 125 \pmod{1000}$ для нечетных n и $5^n \equiv 625 \pmod{1000}$ для четных n.
Отсюда следует, что цифра в разряде сотен зависит только от четности показателя степени «пятерки». Число 4^m четно при любом натуральном m – значит, 5^{4^m} (в частности, при $m = 3^{2^7}$, как в условии задачи) оканчивается на 625, следовательно, цифра в разряде сотен – это 6.
Обратите внимание, что $a^{b^c} \neq (a^b)^c = a^{bc}$. Скорее $a^{b^c} = a^{(b^c)}$.

8-9 класс / 8-9 degree

Task 1.

1. В прямоугольнике $ABCD$ из вершин B и D опущены перпендикуляры на диагональ AC. Эти перпендикуляры пересекают диагональ в точках P и Q соответственно. Найдите площадь прямоугольника, если $AP = 2$, $PQ = 6$.

   There are perpendiculars BP, DQ dropped to the diagonal AC of a rectangle $ABCD$ while points P, Q are located on the diagonal. Find the area of the rectangle while $AP = 2$, $PQ = 6$.

   Answer: 40

2. В прямоугольнике $ABCD$ из вершин B и D опущены перпендикуляры на диагональ AC. Эти перпендикуляры пересекают диагональ в точках P и Q соответственно. Найдите площадь прямоугольника, если $AP = 3$, $PQ = 9$.

   There are perpendiculars BP, DQ dropped to the diagonal AC of a rectangle $ABCD$ while points P, Q are located on the diagonal. Find the area of the rectangle while $AP = 3$, $PQ = 9$.

   Answer: 90

3. В прямоугольнике $ABCD$ из вершин B и D опущены перпендикуляры на диагональ AC. Эти перпендикуляры пересекают диагональ в точках P и Q соответственно. Найдите площадь прямоугольника, если $AP = 7$, $PQ = 21$.

   There are perpendiculars BP, DQ dropped to the diagonal AC of a rectangle $ABCD$ while points P, Q are located on the diagonal. Find the area of the rectangle while $AP = 7$, $PQ = 21$.

   Answer: 490

4. В прямоугольнике $ABCD$ из вершин B и D опущены перпендикуляры на диагональ AC. Эти перпендикуляры пересекают диагональ в точках P и Q соответственно. Найдите площадь прямоугольника, если $AP = 6$, $PQ = 18$.

   There are perpendiculars BP, DQ dropped to the diagonal AC of a rectangle $ABCD$ while points P, Q are located on the diagonal. Find the area of the rectangle while $AP = 6$, $PQ = 18$.

   Answer: 360

Solution (ENG). *Explaining the solution of the task 1, others are being solved similarly.* Let O be the intersection point of the diagonals of the rectangle. Then $BO = AO = AP + PO = AP + \frac{1}{2}PQ = 5$. By the Pythagorean theorem for $\triangle BPO$ we get $BP = \sqrt{BO^2 - PO^2} = \sqrt{5^2 - 3^2} = 4$. Then the area of $\triangle ABC$ equals $\frac{1}{2}AC \cdot BP = 20$ and the area of $ABCD$ is equal to 40.

Solution (RUS). *Разбор варианта 1, остальные решаются аналогично.* Пусть O – точка пересечения диагоналей прямоугольника. Тогда $BO = AO = AP + PO = AP + \frac{1}{2}PQ = 5$. По теореме Пифагора для $\triangle BPO$ имеем $BP = \sqrt{BO^2 - PO^2} = \sqrt{5^2 - 3^2} = 4$. Тогда площадь $\triangle ABC$ равна $\frac{1}{2}AC \cdot BP = 20$ и площадь $ABCD$ равна 40.

Task 2.

1. Найти количество пар $(x; y)$ целых чисел, удовлетворяющих равенству

$$\sqrt{x} + \sqrt{y} = \sqrt{20339}$$

Если $x \neq y$, то пары $(x; y)$ и $(y; x)$ считаются различными.

Find the number of ordered pairs $(x; y)$ of integers satisfying

$$\sqrt{x} + \sqrt{y} = \sqrt{20339}$$

If $x \neq y$ then pairs $(x; y)$ and $(y; x)$ are considered to be different.

Answer: 44

2. Найти количество пар $(x; y)$ целых чисел, удовлетворяющих равенству

$$\sqrt{x} + \sqrt{y} = \sqrt{16337}$$

Если $x \neq y$, то пары $(x; y)$ и $(y; x)$ считаются различными.

Find the number of ordered pairs $(x; y)$ of integers satisfying

$$\sqrt{x} + \sqrt{y} = \sqrt{16337}$$

If $x \neq y$ then pairs $(x; y)$ and $(y; x)$ are considered to be different.

Answer: 32

3. Найти количество пар $(x; y)$ целых чисел, удовлетворяющих равенству

$$\sqrt{x} + \sqrt{y} = \sqrt{31423}$$

Если $x \neq y$, то пары $(x; y)$ и $(y; x)$ считаются различными.

Find the number of ordered pairs $(x; y)$ of integers satisfying

$$\sqrt{x} + \sqrt{y} = \sqrt{31423}$$

If $x \neq y$ then pairs $(x; y)$ and $(y; x)$ are considered to be different.

Answer: 68

4. Найти количество пар $(x; y)$ целых чисел, удовлетворяющих равенству

$$\sqrt{x} + \sqrt{y} = \sqrt{45253}$$

Если $x \neq y$, то пары $(x; y)$ и $(y; x)$ считаются различными.

Find the number of ordered pairs $(x; y)$ of integers satisfying

$$\sqrt{x} + \sqrt{y} = \sqrt{45253}$$

If $x \neq y$ then pairs $(x; y)$ and $(y; x)$ are considered to be different.

Answer: 60

Solution (ENG). *Explaining the solution of the task 1, others are being solved similarly.* Notice that $20339 = 11 \cdot 43^2$ with 11 and 43 being prime numbers. Initial equality transforms to $\sqrt{x} = \sqrt{20339} - \sqrt{y} \Rightarrow x = y + 20339 - 2\sqrt{20339y} \Rightarrow \sqrt{4 \cdot 20339y} \in \mathbb{Z}$. Thus, $y = 11 \cdot d^2$ for some integer $d \leq 43$. Every such y gives us a unique $x = 11 \cdot (43 - d)^2$ – therefore, the number of solutions of the initial equation equals to the number of those d. So, the number is 44.

Solution (RUS). *Разбор варианта 1, остальные решаются аналогично.* Заметим, что $20339 = 11 \cdot 43^2$, где 11 и 43 – простые числа. Исходное равенство преобразуется к виду $\sqrt{x} = \sqrt{20339} - \sqrt{y} \Rightarrow x = y + 20339 - 2\sqrt{20339y} \Rightarrow \sqrt{4 \cdot 20339y} \in \mathbb{Z}$. Значит, $y = 11 \cdot d^2$ для некоторого целого d, не превосходящего 43. Каждому такому y соответствует единственное $x = 11 \cdot (43 - d)^2$ – значит, общее количество решений – это количество целых неотрицательных $d \leq 43$, отсюда количество решений равно 44.

Task 3.

1. Есть лист бумаги с нарисованной сеткой $N \times N$ квадратных клеток. Известно, что на нем можно нарисовать 11025 попарно несовпадающих прямоугольников, стороны которых совпадают с линиями сетки (прямоугольники могут пересекаться друг с другом). Найдите наименьшее возможное N.

   There is a sheet of paper with a grid of $N \times N$ squares drawn. It is known that there is possible to select 11025 pairwise mismatched rectangles on this sheet with their sides lying on the grid (the rectangles may intersect with some other ones). Find smallest possible N.

   Answer: 14

2. Есть лист бумаги с нарисованной сеткой $N \times N$ квадратных клеток. Известно, что на нем можно нарисовать 23409 попарно несовпадающих прямоугольников, стороны которых совпадают с линиями сетки (прямоугольники могут пересекаться друг с другом). Найдите наименьшее возможное N.

   There is a sheet of paper with a grid of $N \times N$ squares drawn. It is known that there is possible to select 23409 pairwise mismatched rectangles on this sheet with their sides lying on the grid (the rectangles may intersect with some other ones). Find smallest possible N.

   Answer: 17

3. Есть лист бумаги с нарисованной сеткой $N \times N$ квадратных клеток. Известно, что на нем можно нарисовать 18496 попарно несовпадающих прямоугольников, стороны которых совпадают с линиями сетки (прямоугольники могут пересекаться друг с другом). Найдите наименьшее возможное N.

   There is a sheet of paper with a grid of $N \times N$ squares drawn. It is known that there is possible to select 18496 pairwise mismatched rectangles on this sheet with their sides lying on the grid (the rectangles may intersect with some other ones). Find smallest possible N.

   Answer: 16

4. Есть лист бумаги с нарисованной сеткой $N \times N$ квадратных клеток. Известно, что на нем можно нарисовать 76176 попарно несовпадающих прямоугольников, стороны которых совпадают с линиями сетки (прямоугольники могут пересекаться друг с другом). Найдите наименьшее возможное N.

There is a sheet of paper with a grid of $N \times N$ squares drawn. It is known that there is possible to select 76176 pairwise mismatched rectangles on this sheet with their sides lying on the grid (the rectangles may intersect with some other ones). Find smallest possible N.

Answer: 23

Solution (ENG). *Explaining the solution of the task 1, others are being solved similarly.*
We will call one of the sides of the grid «lower» (opposite one – «upper»), one of the adjacent sides – «left» (opposite one – «right»). Each rectangle on the grid lines is uniquely defined by its lower left (A) and upper right (B) vertices. Let us introduce a coordinate system in which the OX axis coincides with the bottom side of the grid, and the OY axis coincides with the left side of the grid.
Let the point A has coordinates (x, y), where x, y are positive integers from 1 to N. Then there are $(N-x)(N-y)$ ways to select its vertex B. Hence, the number of rectangles on the grid lines is $\sum\limits_{x=1}^{N}\sum\limits_{y=1}^{N}(N-x)(N-y) = \sum\limits_{x=1}^{N}(N-x)\sum\limits_{y=1}^{N}(N-y) = ((N-1)+(N-2)+\cdots+(N-1)+(N-N))^2 = \frac{N^2(N+1)^2}{4}$ – an increasing function.
It is given that $\frac{N^2(N+1)^2}{4} \geq 11025 \Rightarrow \frac{N(N+1)}{2} \geq 105 \Rightarrow N \geq 14$. So, the smallest value of N is 14.

Solution (RUS). *Разбор варианта 1, остальные решаются аналогично.*
Будем называть одну из сторон сетки «нижней» (противоположную – верхней), одну из смежных к ней сторон – «левой» (противоположную – правой). Каждый прямоугольник на линиях сетки однозначно задается своими левой нижней (A) и правой верхней (B) вершинами. Введем систему координат, в которой ось OX совпадает с нижней стороной сетки, а ось OY – с левой стороной сетки.
Пусть точка A имеет координаты (x, y), где x, y – натуральные числа от 1 до N. Тогда есть $(N-x)(N-y)$ способов выбрать его вершину B. Значит, количество прямоугольников на линиях сетки равно $\sum\limits_{x=1}^{N}\sum\limits_{y=1}^{N}(N-x)(N-y) = \sum\limits_{x=1}^{N}(N-x)\sum\limits_{y=1}^{N}(N-y) = ((N-1)+(N-2)+\cdots+(N-1)+(N-N))^2 = \frac{N^2(N+1)^2}{4}$ – возрастающая функция от N.
Известно, что $\frac{N^2(N+1)^2}{4} \geq 11025 \Rightarrow \frac{N(N+1)}{2} \geq 105 \Rightarrow N \geq 14$. Значит, наименьшее значение N равно 14.

Task 4.

1. Найдите последние четыре цифры десятичной записи числа

$$5^{5^{5^1}} + 5^{5^{5^2}} + \cdots + 5^{5^{5^{11}}}$$

Запишите эти цифры в поле для ответа с сохранением их порядка без пробелов и других символов, т.е. в виде четырехзначного числа.

Find the last 4 digits of the decimal notation of the number

$$5^{5^{5^1}} + 5^{5^{5^2}} + \cdots + 5^{5^{5^{11}}}$$

Write these digits in the answer as a 4-digit number (keeping their order without spaces and any other characters).

Answer: 4375

2. Найдите последние четыре цифры десятичной записи числа

$$5^{5^{5^1}} + 5^{5^{5^2}} + \cdots + 5^{5^{5^{14}}}$$

Запишите эти цифры в поле для ответа с сохранением их порядка без пробелов и других символов, т.е. в виде четырехзначного числа.

Find the last 4 digits of the decimal notation of the number

$$5^{5^{5^1}} + 5^{5^{5^2}} + \cdots + 5^{5^{5^{14}}}$$

Write these digits in the answer as a 4-digit number (keeping their order without spaces and any other characters).

Answer: 3750

3. Найдите последние четыре цифры десятичной записи числа

$$5^{5^{5^1}} + 5^{5^{5^2}} + \cdots + 5^{5^{5^{15}}}$$

Запишите эти цифры в поле для ответа с сохранением их порядка без пробелов и других символов, т.е. в виде четырехзначного числа.

Find the last 4 digits of the decimal notation of the number

$$5^{5^{5^1}} + 5^{5^{5^2}} + \cdots + 5^{5^{5^{15}}}$$

Write these digits in the answer as a 4-digit number (keeping their order without spaces and any other characters).

Answer: 6875

4. Найдите последние четыре цифры десятичной записи числа

$$5^{5^{5^1}} + 5^{5^{5^2}} + \cdots + 5^{5^{5^{18}}}$$

Запишите эти цифры в поле для ответа с сохранением их порядка без пробелов и других символов, т.е. в виде четырехзначного числа.

Find the last 4 digits of the decimal notation of the number

$$5^{5^{5^1}} + 5^{5^{5^2}} + \cdots + 5^{5^{5^{18}}}$$

Write these digits in the answer as a 4-digit number (keeping their order without spaces and any other characters).

Answer: 6250

Solution (ENG). *Explaining the solution of the task 1, others are being solved similarly.* The last 4 digits of a number are its remainder when divided by $10^4 = 2^4 \cdot 5^4$. Obviously, for integers $n \geq 0$ the remainder when dividing $5^{5^{5^n}}$ by 5^4 is 0 since $5^{5^n} > 4$. Let's find the remainder when $5^{5^{5^n}}$ is divided by 2^4: according to Euler's theorem, $5^{5^{5^n}} \equiv 5 \pmod{2^4}$ since $5^{5^n} \equiv c \pmod{\phi(2^4)}$, where

$\phi(2^4) = 8$ is the Euler function, and $c = 1$ for odd n and $c = 5$ for even n.
According to the Chinese Remainder Theorem, there is a unique d such that if $5^{5^{5^n}} \equiv 5 \pmod{2^4}$ and $5^{5^{5^n}} \equiv 0 \pmod{5^4}$, then $5^{5^{5^n}} \equiv d \pmod{2^4 \cdot 5^4}$. It is easy to see that $d = 3125$ fits: it is divisible by 5^4 and gives the remainder of 5 when divided by 2^4. So, $5^{5^{5^n}}$ ends by 3125 for any positive integer n. Then $3125 \cdot 11 \equiv 4375 \pmod{10^4}$.

Solution (RUS). *Разбор варианта 1, остальные решаются аналогично.*
Последние 4 цифры числа – это его остаток при делении на $10^4 = 2^4 \cdot 5^4$. Очевидно, при целых $n \geq 0$ остаток при делении $5^{5^{5^n}}$ на 5^4 равен 0, поскольку $5^{5^n} > 4$. Найдем остаток при делении $5^{5^{5^n}}$ на 2^4: согласно теореме Эйлера, $5^{5^{5^n}} \equiv 5 \pmod{2^4}$, поскольку $5^{5^n} \equiv c \pmod{\phi(2^4)}$, где $\phi(2^4) = 8$ – функция Эйлера, а $c = 1$ при нечетных n и $c = 5$ при четных n.
Согласно китайской теореме об остатках, существует единственное d, такое, что если $5^{5^{5^n}} \equiv 5 \pmod{2^4}$ и $5^{5^{5^n}} \equiv 0 \pmod{5^4}$, то $5^{5^{5^n}} \equiv d \pmod{2^4 \cdot 5^4}$. Нетрудно видеть, что $d = 3125$ подходит: оно делится на 5^4 и дает остаток 5 при делении на 2^4. Значит, $5^{5^{5^n}}$ оканчивается на 3125 при любом натуральном n. Далее: $3125 \cdot 11 \equiv 4375 \pmod{10^4}$.

Task 5.

1. Найдите все функции $f(x)$, которые при любых вещественных x, y удовлетворяют равенству
$$f(x^2 + y) = f(x^2 - y) + 2x^4 f(y)$$
Find all functions $f(x)$ that for all real x, y satisfy
$$f(x^2 + y) = f(x^2 - y) + 2x^4 f(y)$$
Answer: $f(x) \equiv 0$

2. Найдите все функции $f(x)$, которые при любых вещественных x, y удовлетворяют равенству
$$f(x^2 + y) = f(x^2 - y) - 2x^4 f(y)$$
Find all functions $f(x)$ that for all real x, y satisfy
$$f(x^2 + y) = f(x^2 - y) - 2x^4 f(y)$$
Answer: $f(x) \equiv 0$

3. Найдите все функции $f(x)$, которые при любых вещественных x, y удовлетворяют равенству
$$f(x^2 + y) = f(x^2 - y) + 7x^4 f(y)$$
Find all functions $f(x)$ that for all real x, y satisfy
$$f(x^2 + y) = f(x^2 - y) + 7x^4 f(y)$$
Answer: $f(x) \equiv 0$

4. Найдите все функции $f(x)$, которые при любых вещественных x, y удовлетворяют равенству
$$f(x^2+y) = f(x^2-y) - 5x^4 f(y)$$

   Find all functions $f(x)$ that for all real x, y satisfy
$$f(x^2+y) = f(x^2-y) - 5x^4 f(y)$$

Answer: $f(x) \equiv 0$

Solution (ENG). *Explaining the solution of the task 1, others are being solved similarly.*
While the function $f(t)$ is defined for all $t \in \mathbb{R}$, we put $x = 0$ in the given equality for f: $f(-y) - f(y) = 0$ for any $y \in \mathbb{R}$, thus our function f is even.
So, $2x^4 f(y) = 2x^4 f(-y)$ for all real x, y, then $f(x^2-y) - f(x^2+y) = f(x^2-(-y)) - f(x^2+(-y)) \Rightarrow f(x^2-y) = f(x^2+y) \Rightarrow 2x^4 f(y) = 0$ for all x, y.
Thus, $f(t) = 0$ for all $t \in \mathbb{R}$.

Solution (RUS). *Разбор варианта 1, остальные решаются аналогично.*
Поскольку функция $f(t)$ определена для всех $t \in \mathbb{R}$, подставим в равенство в условии $x = 0$: $f(-y) - f(y) = 0$ для любого $y \in \mathbb{R}$, т.е. функция f – чётная.
Значит, $2x^4 f(y) = 2x^4 f(-y)$ для произвольных x, y, откуда $f(x^2-y) - f(x^2+y) = f(x^2-(-y)) - f(x^2+(-y)) \Rightarrow f(x^2-y) = f(x^2+y) \Rightarrow 2x^4 f(y) = 0$ для любых вещественных x, y.
Отсюда $f(t) = 0$ для всех $t \in \mathbb{R}$.

Task 6.

1. Решите уравнение:
$$\frac{1}{x^3} - \frac{1}{(x+2)^3} = 88$$

   Solve for real x:
$$\frac{1}{x^3} - \frac{1}{(x+2)^3} = 88$$

   Answer: $\frac{-2\pm\sqrt{6}}{2}$

2. Решите уравнение:
$$\frac{1}{x^3} - \frac{1}{(x+2)^3} = 270$$

   Solve for real x:
$$\frac{1}{x^3} - \frac{1}{(x+2)^3} = 270$$

   Answer: $-1 \pm \frac{2\sqrt{3}}{3}$

3. Решите уравнение:
$$\frac{1}{(x+2)^3} - \frac{1}{x^3} = 40$$

   Solve for real x:
$$\frac{1}{(x+2)^3} - \frac{1}{x^3} = 40$$

Answer: $\frac{-2\pm\sqrt{2}}{2}$

4. Решите уравнение:

$$\frac{1}{(x+2)^3} - \frac{1}{x^3} = 162$$

Solve for real x:

$$\frac{1}{(x+2)^3} - \frac{1}{x^3} = 162$$

Answer: $-1 \pm \frac{\sqrt{6}}{3}$

Solution (ENG). *Explaining the solution of the task 1, others are being solved similarly.*
Let's note: $y = x+2$. Then we get system of equations for x and y:

$$\begin{cases} y - x = 2 \\ \frac{1}{x^3} - \frac{1}{y^3} = 88 \end{cases}$$

The second equations transforms like $\frac{y^3-x^3}{x^3y^3} = 88 \Rightarrow (y-x)(y^2+xy+x^2) = 88(xy)^3 \Rightarrow (y-x)((y-x)^2+3xy) = 88(xy)^3$. Using $y-x=2$ and noting $t = xy$ we get $88t^3 - 6t - 8 = 0 \Rightarrow 44t^3 - 3t - 4 = 0$. One of its roots is: $t = \frac{1}{2}$. From division $44t^3 - 3t - 4$ by $t - \frac{1}{2}$ we get $44t^2 + 22t + 8$which has negative discriminant and no real roots.
So,

$$\begin{cases} y - x = 2 \\ xy = \frac{1}{2} \end{cases}$$

from where $x = \frac{-2\pm\sqrt{6}}{2}$.

Solution (RUS). *Разбор варианта 1, остальные решаются аналогично.*
Введем обозначение: $y = x+2$. Получим систему уравнений, равносильную исходному уравнению:

$$\begin{cases} y - x = 2 \\ \frac{1}{x^3} - \frac{1}{y^3} = 88 \end{cases}$$

Преобразуем второе уравнение системы: $\frac{y^3-x^3}{x^3y^3} = 88 \Rightarrow (y-x)(y^2+xy+x^2) = 88(xy)^3 \Rightarrow (y-x)((y-x)^2+3xy) = 88(xy)^3$. Используя $y-x=2$ и обозначая $t = xy$, получим $88t^3 - 6t - 8 = 0 \Rightarrow 44t^3 - 3t - 4 = 0$. Один из корней этого уравнения: $t = \frac{1}{2}$. При делении $44t^3 - 3t - 4$ на $t - \frac{1}{2}$ получим квадратный трехчлен $44t^2 + 22t + 8$, дискриминант которого отрицателен.
Итак,

$$\begin{cases} y - x = 2 \\ xy = \frac{1}{2} \end{cases}$$

откуда $x = \frac{-2\pm\sqrt{6}}{2}$.

10-11 класс / 10-12 degree

Task 1.

1. Дана шестиугольная призма, основания которой – правильные шестиугольники $ABCDEF$ и $A_1B_1C_1D_1E_1F_1$ со стороной $2\sqrt{\frac{7}{3}}$, а боковые ребра перпендикулярны основаниям и равны $\sqrt{7}$. Центры оснований – точки O и O_1 соответственно; точка X – середина отрезка OA, точка Y – середина O_1C_1.
Известно, что пчела проползла по поверхности этой призмы из точки X в точку Y по наикратчайшей траектории. Найдите длину этой траектории.

   There is a hexagonal prism with the bases being regular hexagons $ABCDEF$ and $A_1B_1C_1D_1E_1F_1$ with sides $2\sqrt{\frac{7}{3}}$, and the lateral edges being perpendicular to the bases and equal to $\sqrt{7}$. The centers of the bases are points O and O_1 respectively; point X is a midpoint of segment OA, point Y is a midpoint of O_1C_1.
It is known that a bee crawled along the surface of the prism from point X to point Y by the shortest path. Find the length of this path.

   Answer: 7

2. Дана шестиугольная призма, основания которой – правильные шестиугольники $ABCDEF$ и $A_1B_1C_1D_1E_1F_1$ со стороной $\sqrt{\frac{13}{3}}$, а боковые ребра перпендикулярны основаниям и равны $\sqrt{13}$. Центры оснований – точки O и O_1 соответственно; точка X – середина отрезка OA, точка Y – середина O_1C_1.
Известно, что пчела проползла по поверхности этой призмы из точки X в точку Y по наикратчайшей траектории. Найдите длину этой траектории.

   There is a hexagonal prism with the bases being regular hexagons $ABCDEF$ and $A_1B_1C_1D_1E_1F_1$ with sides $\sqrt{\frac{13}{3}}$, and the lateral edges being perpendicular to the bases and equal to $\sqrt{13}$. The centers of the bases are points O and O_1 respectively; point X is a midpoint of segment OA, point Y is a midpoint of O_1C_1.
It is known that a bee crawled along the surface of the prism from point X to point Y by the shortest path. Find the length of this path.

   Answer: 6.24

3. Дана шестиугольная призма, основания которой – правильные шестиугольники $ABCDEF$ и $A_1B_1C_1D_1E_1F_1$ со стороной $4\sqrt{57}$, а боковые ребра перпендикулярны основаниям и равны $3\sqrt{19}$. Центры оснований – точки O и O_1 соответственно; точка X – середина отрезка OA, точка Y – середина O_1C_1.
Известно, что пчела проползла по поверхности этой призмы из точки X в точку Y по наикратчайшей траектории. Найдите длину этой траектории.

   There is a hexagonal prism with the bases being regular hexagons $ABCDEF$ and $A_1B_1C_1D_1E_1F_1$ with sides $4\sqrt{57}$, and the lateral edges being perpendicular to the bases and equal to $3\sqrt{19}$. The centers of the bases are points O and O_1 respectively; point X is a midpoint of segment OA, point Y is a midpoint of O_1C_1.
It is known that a bee crawled along the surface of the prism from point X to point Y by the shortest path. Find the length of this path.

Answer: 57

4. Дана шестиугольная призма, основания которой – правильные шестиугольники $ABCDEF$ и $A_1B_1C_1D_1E_1F_1$ со стороной $6\sqrt{3}$, а боковые ребра перпендикулярны основаниям и равны 6. Центры оснований – точки O и O_1 соответственно; точка X – середина отрезка OA, точка Y – середина O_1C_1.
Известно, что пчела проползла по поверхности этой призмы из точки X в точку Y по наикратчайшей траектории. Найдите длину этой траектории.

There is a hexagonal prism with the bases being regular hexagons $ABCDEF$ and $A_1B_1C_1D_1E_1F_1$ with sides $6\sqrt{3}$, and the lateral edges being perpendicular to the bases and equal to 6. The centers of the bases are points O and O_1 respectively; point X is a midpoint of segment OA, point Y is a midpoint of O_1C_1.
It is known that a bee crawled along the surface of the prism from point X to point Y by the shortest path. Find the length of this path.

Answer: 21

Solution (ENG). *Explaining the solution of the task 1, others are being solved similarly.*
The bee should crawl along the $ABCDEF$ facet, along the lateral surface of the prism and along the $A_1B_1C_1D_1E_1F_1$ facet in that order. Indeed, if the bee left the facet $ABCDEF$ at the point P and then returned to this facet through the point Q, then it did not follow the shortest path: the shortest path between the points of the convex $ABCDEF$ also lies in $ABCDEF$. Likewise with $A_1B_1C_1D_1E_1F_1$.
Considering the unfolding of the prism, we will make sure that the shortest path of the bee between the points X and Y does not go beyond the surface of the prism $ABCOA_1B_1C_1O_1$ – it means that it passes along the facet ABB_1A_1 or along the facet BCC_1B_1. Having considered the sweeps $ABCOA_1B_1C_1O_1$ with the paths of the bee along the mentioned faces, we will make sure that the lengths of the paths of the bee are equal. Let's calculate the length of the path, considering the length of the side of the hexagon equal to $a = 2\sqrt{\frac{7}{3}}$, the height of the prism equal to $h = \sqrt{7}$. Then $XY = \sqrt{(\frac{3}{4}a)^2 + (h + \frac{3\sqrt{3}}{4}a)^2} = 7$.

Solution (RUS). *Разбор варианта 1, остальные решаются аналогично.*
Пчела должна проползти по грани $ABCDEF$, по боковой поверхности призмы и по грани $A_1B_1C_1D_1E_1F_1$ – именно в таком порядке. Действительно, если пчела покинула грань $ABCDEF$ в точке P, а потом вернулась в эту грань через точку Q, то она проделала не кратчайший путь: кратчайший путь между точками выпуклого $ABCDEF$ тоже лежит в $ABCDEF$. Аналогично с $A_1B_1C_1D_1E_1F_1$.
Рассматривая развертки призмы, убедимся в том, что кратчайший путь пчелы между точками X и Y не выходит за пределы поверхности призмы $ABCOA_1B_1C_1O_1$ – значит, проходит по грани ABB_1A_1 или по грани BCC_1B_1. Рассмотрев развертки $ABCOA_1B_1C_1O_1$ с путями пчелы по упомянутым граням, убедимся в равенстве длин путей пчелы. Вычислим длину пути, считая длину стороны шестиугольника равной $a = 2\sqrt{\frac{7}{3}}$, высоту призмы равной $h = \sqrt{7}$. Тогда $XY = \sqrt{(\frac{3}{4}a)^2 + (h + \frac{3\sqrt{3}}{4}a)^2} = 7$.

Task 2.

1. Найдите наибольшее натуральное n, при котором выражение $\sqrt{n} + \sqrt{n + 2021}$ принимает целое значение.

   Find the greatest integer n such that $\sqrt{n} + \sqrt{n + 2021}$ is an integer.

Answer: 1020100

2. Найдите наибольшее натуральное n, при котором выражение $\sqrt{n}+\sqrt{n+979}$ принимает целое значение.

   Find the greatest integer n such that $\sqrt{n}+\sqrt{n+979}$ is an integer.

   Answer: 239121

3. Найдите наибольшее натуральное n, при котором выражение $\sqrt{n}+\sqrt{n+2479}$ принимает целое значение.

   Find the greatest integer n such that $\sqrt{n}+\sqrt{n+2479}$ is an integer.

   Answer: 1535121

4. Найдите наибольшее натуральное n, при котором выражение $\sqrt{n}+\sqrt{n+1537}$ принимает целое значение.

   Find the greatest integer n such that $\sqrt{n}+\sqrt{n+1537}$ is an integer.

   Answer: 589824

Solution (ENG). *Explaining the solution of the task 1, others are being solved similarly.*
Let $\sqrt{n}+\sqrt{n+2021}=m\in\mathbb{Z}$. Then $\sqrt{n+2021}=m-\sqrt{n}\Rightarrow m^2-2021=2m\sqrt{n}\Rightarrow\sqrt{n}=\frac{m^2-2021}{2m}=\frac{1}{2}(m-\frac{2021}{m})$.
The last expression must be non-negative integer – thus, m is a divisor of $2021=43\cdot 47$. Obviously the greatest n will be for $m=2021$: $n=\frac{1}{4}(2021-1)^2=1020100$.

Solution (RUS). *Разбор варианта 1, остальные решаются аналогично.*
Пусть $\sqrt{n}+\sqrt{n+2021}=m\in\mathbb{Z}$. Далее $\sqrt{n+2021}=m-\sqrt{n}\Rightarrow m^2-2021=2m\sqrt{n}\Rightarrow\sqrt{n}=\frac{m^2-2021}{2m}=\frac{1}{2}(m-\frac{2021}{m})$.
Последнее выражение должно принимать целое неотрицательное значение – значит, m – делитель числа $2021=43\cdot 47$. Очевидно, наибольшее n достигается при $m=2021$: $n=\frac{1}{4}(2021-1)^2=1020100$.

Task 3.

1. Есть лист бумаги с нарисованной сеткой $N\times N$ квадратных клеток. Известно, что на нем можно нарисовать 11025 попарно несовпадающих прямоугольников, стороны которых совпадают с линиями сетки (прямоугольники могут пересекаться друг с другом). Найдите наименьшее возможное N.

   There is a sheet of paper with a grid of $N\times N$ squares drawn. It is known that there is possible to select 11025 pairwise mismatched rectangles on this sheet with their sides lying on the grid (the rectangles may intersect with some other ones). Find smallest possible N.

   Answer: 14

2. Есть лист бумаги с нарисованной сеткой $N\times N$ квадратных клеток. Известно, что на нем можно нарисовать 23409 попарно несовпадающих прямоугольников, стороны которых совпадают с линиями сетки (прямоугольники могут пересекаться друг с другом). Найдите наименьшее возможное N.

There is a sheet of paper with a grid of $N \times N$ squares drawn. It is known that there is possible to select 23409 pairwise mismatched rectangles on this sheet with their sides lying on the grid (the rectangles may intersect with some other ones). Find smallest possible N.

Answer: 17

3. Есть лист бумаги с нарисованной сеткой $N \times N$ квадратных клеток. Известно, что на нем можно нарисовать 18496 попарно несовпадающих прямоугольников, стороны которых совпадают с линиями сетки (прямоугольники могут пересекаться друг с другом). Найдите наименьшее возможное N.

   There is a sheet of paper with a grid of $N \times N$ squares drawn. It is known that there is possible to select 18496 pairwise mismatched rectangles on this sheet with their sides lying on the grid (the rectangles may intersect with some other ones). Find smallest possible N.

   Answer: 16

4. Есть лист бумаги с нарисованной сеткой $N \times N$ квадратных клеток. Известно, что на нем можно нарисовать 76176 попарно несовпадающих прямоугольников, стороны которых совпадают с линиями сетки (прямоугольники могут пересекаться друг с другом). Найдите наименьшее возможное N.

   There is a sheet of paper with a grid of $N \times N$ squares drawn. It is known that there is possible to select 76176 pairwise mismatched rectangles on this sheet with their sides lying on the grid (the rectangles may intersect with some other ones). Find smallest possible N.

   Answer: 23

Solution (ENG). See the solution of the task 3 for 8-9 degree.

Solution (RUS). См. решение задачи №3 для 8-9 кл.

Task 4.

1. Найдите последние четыре цифры десятичной записи числа

$$5^{5^{5^1}} + 5^{5^{5^2}} + \cdots + 5^{5^{5^{11}}}$$

   Запишите эти цифры в поле для ответа с сохранением их порядка без пробелов и других символов, т.е. в виде четырехзначного числа.

   Find the last 4 digits of the decimal notation of the number

$$5^{5^{5^1}} + 5^{5^{5^2}} + \cdots + 5^{5^{5^{11}}}$$

   Write these digits in the answer as a 4-digit number (keeping their order without spaces and any other characters).

   Answer: 4375

2. Найдите последние четыре цифры десятичной записи числа

$$5^{5^{5^1}} + 5^{5^{5^2}} + \dots + 5^{5^{5^{14}}}$$

Запишите эти цифры в поле для ответа с сохранением их порядка без пробелов и других символов, т.е. в виде четырехзначного числа.

Find the last 4 digits of the decimal notation of the number

$$5^{5^{5^1}} + 5^{5^{5^2}} + \dots + 5^{5^{5^{14}}}$$

Write these digits in the answer as a 4-digit number (keeping their order without spaces and any other characters).

Answer: 3750

3. Найдите последние четыре цифры десятичной записи числа

$$5^{5^{5^1}} + 5^{5^{5^2}} + \dots + 5^{5^{5^{15}}}$$

Запишите эти цифры в поле для ответа с сохранением их порядка без пробелов и других символов, т.е. в виде четырехзначного числа.

Find the last 4 digits of the decimal notation of the number

$$5^{5^{5^1}} + 5^{5^{5^2}} + \dots + 5^{5^{5^{15}}}$$

Write these digits in the answer as a 4-digit number (keeping their order without spaces and any other characters).

Answer: 6875

4. Найдите последние четыре цифры десятичной записи числа

$$5^{5^{5^1}} + 5^{5^{5^2}} + \dots + 5^{5^{5^{18}}}$$

Запишите эти цифры в поле для ответа с сохранением их порядка без пробелов и других символов, т.е. в виде четырехзначного числа.

Find the last 4 digits of the decimal notation of the number

$$5^{5^{5^1}} + 5^{5^{5^2}} + \dots + 5^{5^{5^{18}}}$$

Write these digits in the answer as a 4-digit number (keeping their order without spaces and any other characters).

Answer: 6250

Solution (ENG). See the solution of the task 4 for 8-9 degree.

Solution (RUS). См. решение задачи №4 для 8-9 кл.

Task 5.

1. Решите для $x > 1$:

$$\sqrt{x} + \sqrt[9]{x} = \sqrt[3]{x} + \sqrt[7]{x}$$

Solve for $x > 1$:

$$\sqrt{x} + \sqrt[9]{x} = \sqrt[3]{x} + \sqrt[7]{x}$$

Answer: $x \in \varnothing$

2. Решите для $x > 1$:

$$\sqrt{x} + \sqrt[11]{x} = \sqrt[5]{x} + \sqrt[9]{x}$$

Solve for $x > 1$:

$$\sqrt{x} + \sqrt[11]{x} = \sqrt[5]{x} + \sqrt[9]{x}$$

Answer: $x \in \varnothing$

3. Решите для $x > 1$:

$$\sqrt{x} + \sqrt[17]{x} = \sqrt[7]{x} + \sqrt[13]{x}$$

Solve for $x > 1$:

$$\sqrt{x} + \sqrt[17]{x} = \sqrt[7]{x} + \sqrt[13]{x}$$

Answer: $x \in \varnothing$

4. Решите для $x > 1$:

$$\sqrt{x} + \sqrt[21]{x} = \sqrt[5]{x} + \sqrt[17]{x}$$

Solve for $x > 1$:

$$\sqrt{x} + \sqrt[21]{x} = \sqrt[5]{x} + \sqrt[17]{x}$$

Answer: $x \in \varnothing$

Solution (ENG). *Explaining the solution of the task 1, others are being solved similarly.*
Let's note: $t = \sqrt[126]{x} > 1$. Initial equation will transform to

$$t^{63} + t^{14} = t^{42} + t^{18} \Rightarrow t^{49} + 1 = t^{28} + t^{4} \Rightarrow t^{49} - t^{4} = t^{28} - 1 \Rightarrow t^{4}(t^{45} - 1) = t^{28} - 1$$

Because of $t > 1$ we have $t^4 > 1$ and $t^{45} > t^{28} \Rightarrow t^{45} - 1 > t^{28} - 1$ – thus, the equality $t^4(t^{45} - 1) = t^{28} - 1$ does not hold for $t > 1$ and initial equation has no roots.
In many solutions to this problem the participants of the Olympiad referred to the growth rate of functions represented by the left and right sides of the equality given. The statements «the function on the left-hand side of the equality grows faster» (it requires a proof) and then «therefore functions have at most one common point» (this also requires a proof) were widespread. If such a statement was not proven, then the solution is incomplete.

Solution (RUS). *Разбор варианта 1, остальные решаются аналогично.*
Введем обозначение: $t = \sqrt[126]{x} > 1$. Уравнение примет вид

$$t^{63} + t^{14} = t^{42} + t^{18} \Rightarrow t^{49} + 1 = t^{28} + t^{4} \Rightarrow t^{49} - t^{4} = t^{28} - 1 \Rightarrow t^{4}(t^{45} - 1) = t^{28} - 1$$

Поскольку $t > 1$, имеем $t^4 > 1$ и $t^{45} > t^{28} \Rightarrow t^{45} - 1 > t^{28} - 1$ – значит, равенство $t^4(t^{45} - 1) = t^{28} - 1$ невозможно для $t > 1$ и исходное уравнение не имеет корней.
Во многих решениях этой задачи участники олимпиады ссылались на скорость роста функций, представленных левой и правой частями равенства. Распространенным было утверждение «функция в левой части равенства растет быстрее» (оно нуждается в доказательстве) и далее «поэтому функции имеют не более одной общей точки» (это тоже нуждается в доказательстве). Если подобное утверждение не доказано, то решение является неполным.

Task 6.

1. Равносторонний треугольник со стороной 20 разделен линиями, параллельными его сторонам, на равносторонние треугольники со стороной 1, которые будут использоваться как игровые поля.
   На этой доске Анна и Борис играют в игру: Анна ходит первой – ставит фишку на одно из игровых полей (т.е. в один из треугольников со стороной 1). Далее, начиная с первого хода Бориса, игроки по очереди сдвигают фишку в соседнее по стороне игровое поле, при этом запрещено сдвигать фишку в поле, в котором она уже была. Проигрывает тот, кто не может сделать ход.
   Может ли кто-то из игроков гарантировать себе победу независимо от игры соперника?

   An equilateral triangle with a side 20 is divided by lines parallel to its sides into equilateral triangles with sides 1 (they will be used as playing fields).
   On this board, Anna and Boris play a game: Anna moves first, placing a piece on one of the playing fields (i.e. in one of the triangles with sides equal to 1). Then, starting from the first move of Boris, the players (in turn) move the piece to the adjacent playing field while it is forbidden to move the piece to the field where it has already been. The player who cannot make a move loses the game.
   Can any of the players guarantee a victory regardless of the opponent's moves?

   Answer: Anna has a winning strategy.

2. Равносторонний треугольник со стороной 30 разделен линиями, параллельными его сторонам, на равносторонние треугольники со стороной 1, которые будут использоваться как игровые поля.
   На этой доске Анна и Борис играют в игру: Анна ходит первой – ставит фишку на одно из игровых полей (т.е. в один из треугольников со стороной 1). Далее, начиная с первого хода Бориса, игроки по очереди сдвигают фишку в соседнее по стороне игровое поле, при этом запрещено сдвигать фишку в поле, в котором она уже была. Проигрывает тот, кто не может сделать ход.
   Может ли кто-то из игроков гарантировать себе победу независимо от игры соперника?

   An equilateral triangle with a side 30 is divided by lines parallel to its sides into equilateral triangles with sides 1 (they will be used as playing fields).
   On this board, Anna and Boris play a game: Anna moves first, placing a piece on one of the playing fields (i.e. in one of the triangles with sides equal to 1). Then, starting from the first move of Boris, the players (in turn) move the piece to the adjacent playing field while it is forbidden to move the piece to the field where it has already been. The player who cannot make a move loses the game.
   Can any of the players guarantee a victory regardless of the opponent's moves?

   Answer: Anna has a winning strategy.

3. Равносторонний треугольник со стороной 24 разделен линиями, параллельными его сторонам, на равносторонние треугольники со стороной 1, которые будут использоваться как игровые поля.
На этой доске Анна и Борис играют в игру: Анна ходит первой – ставит фишку на одно из игровых полей (т.е. в один из треугольников со стороной 1). Далее, начиная с первого хода Бориса, игроки по очереди сдвигают фишку в соседнее по стороне игровое поле, при этом запрещено сдвигать фишку в поле, в котором она уже была. Проигрывает тот, кто не может сделать ход.
Может ли кто-то из игроков гарантировать себе победу независимо от игры соперника?

An equilateral triangle with a side 24 is divided by lines parallel to its sides into equilateral triangles with sides 1 (they will be used as playing fields).
On this board, Anna and Boris play a game: Anna moves first, placing a piece on one of the playing fields (i.e. in one of the triangles with sides equal to 1). Then, starting from the first move of Boris, the players (in turn) move the piece to the adjacent playing field while it is forbidden to move the piece to the field where it has already been. The player who cannot make a move loses the game.
Can any of the players guarantee a victory regardless of the opponent's moves?

Answer: Anna has a winning strategy.

4. Равносторонний треугольник со стороной 28 разделен линиями, параллельными его сторонам, на равносторонние треугольники со стороной 1, которые будут использоваться как игровые поля.
На этой доске Анна и Борис играют в игру: Анна ходит первой – ставит фишку на одно из игровых полей (т.е. в один из треугольников со стороной 1). Далее, начиная с первого хода Бориса, игроки по очереди сдвигают фишку в соседнее по стороне игровое поле, при этом запрещено сдвигать фишку в поле, в котором она уже была. Проигрывает тот, кто не может сделать ход.
Может ли кто-то из игроков гарантировать себе победу независимо от игры соперника?

An equilateral triangle with a side 28 is divided by lines parallel to its sides into equilateral triangles with sides 1 (they will be used as playing fields).
On this board, Anna and Boris play a game: Anna moves first, placing a piece on one of the playing fields (i.e. in one of the triangles with sides equal to 1). Then, starting from the first move of Boris, the players (in turn) move the piece to the adjacent playing field while it is forbidden to move the piece to the field where it has already been. The player who cannot make a move loses the game.
Can any of the players guarantee a victory regardless of the opponent's moves?

Answer: Anna has a winning strategy.

Solution (ENG). *Explaining the solution of the task 1, others are being solved similarly.*
We will consider one of the sides of the game board as horizontal, and its opposite vertex – as lying above the side. Let's prove that Anna has a winning strategy.
On her first move Anna must place the piece on the field that is farthest from the horizontal side of the board. After each of Boris's moves she will make a move to the «left». Let's prove that with such a strategy Anna will always have a move. Then she will obviously win, since the number of moves in the game is finite.
Let's cut off (with a line parallel to the «left» side of the board) a «thick» layer of one equilateral triangle with side 1. This layer will contain 39 small triangles including the one farthest from the horizontal

side of the board. We split all these triangles (except for the top one) into pairs of side-adjacent and forming rhombs with side 1 and corners 60° and 120°.
With his first move Boris will enter the first rhomb, after which Anna will enter the second triangle of this rhomb. After that Boris will have only one option: to enter the next rhomb, after which Anna will enter the second triangle of this rhomb, and so on. With her last move, Anna will enter the lower left triangle of the board, from where Boris will have no move, and he will lose.

Solution (RUS). *Разбор варианта 1, остальные решаются аналогично.*
Для удобства будем считать одну из сторон игровой доски горизонтальной, а не примыкающую к ней вершину – лежащей выше этой стороны. Докажем, что у Анны есть выигрышная стратегия. Первым ходом Анна должна поставить фишку в игровое поле, наиболее удаленное от горизонтальной стороны доски. После каждого хода Бориса она будет делать ход «левее». Докажем, что при такой стратегии у Анны всегда будет ход. Тогда, очевидно, она выиграет, поскольку количество ходов в игре конечно.
Отрежем линией, параллельной «левой» стороне доски, слой «толщиной» в один равносторонний треугольник со стороной 1. В этом слое будет 39 маленьких треугольников, включая самый удаленный от горизонтальной стороны доски. Разобьем все эти треугольники (кроме верхнего) на пары смежных по стороне и образующих ромб со стороной 1 и углами 60° и 120°.
Первым своим ходом Борис зайдет в первый ромб, после чего Анна зайдет во второй треугольник этого ромба. После этого у Бориса будет лишь один вариант – войти в следующий ромб, после чего Анна зайдет во второй треугольник этого ромба, и т.д. Своим последним ходом Анна зайдет в нижний левый треугольник доски, откуда у Бориса не будет хода, и он проиграет.

Финальный тур / Final round

7-й класс / 7th degree

Task 7. В зале собрались горожане, каждый из которых – либо честный, либо жулик, либо хитрец, и все друг про друга знают, кто есть кто. Каждый из честных написал на листе количество честных (включая себя), каждый жулик написал суммарное количество хитрецов и жуликов (включая себя), а каждый хитрец написал количество жуликов.
Затем в зал вошел секретарь, не знающий никого из присутствующих, и собрал все листы. В каком случае секретарь **не сможет** по написанным числам восстановить количество честных людей в зале?

Citizens gathered in the hall, and each of them is either honest, or a liar, or a tricky one, and everyone knows the truth about each other. Each of the honest ones wrote the number of honest ones (including himself), each liar wrote the total number of liars and tricksters (including himself), and each tricky man wrote the number of liars.
Then the secretary, who did not know any of those citizens, entered the hall and collected all the sheets. In what case will the secretary **not be able to** restore the number of honest people in the hall from the numbers written?

Solution (RUS). Пусть n – количество людей в зале, a – количество честных людей, b – количество хитрецов. Секретарь получит n листов, среди которых a будут содержать число a (написаны честными людьми); b листов содержат число $n-a-b$; $n-a-b$ листов содержат число $n-a$. Если $b=0$, то секретарь получит a листов с числом a и $n-a$ листов с числом $n-a$, и не сможет отличить честных людей от жуликов, если $a \neq n-a$. Значит, если $b=0$ и $n \neq 2a$, то секретарь не сможет определить количество честных людей.
Пусть теперь $b>0$. Заметим, что число, которое пишет честный, всегда равно количеству честных людей, а число, которое пишет жулик, больше количества жуликов: $n-a>n-a-b$ при $b>0$. Значит, секретарь сможет определить количество честных людей, если количество хитрецов не равно количеству жуликов, т.е. $b \neq n-a-b$. Если же $b=n-a-b$, то секретарь сможет отличить ответ жулика от остальных: он знает количество жуликов $n-a-b$ и среди чисел, написанных не-жуликами, ищет $n-a-b$.
Если ответы не-жуликов различаются, то те, кто написал $n-a-b$ – хитрецы: значит, секретарь найдет количество честных людей. Если же ответы не-жуликов одинаковые, то $a=n-a-b$, что вкупе с $b=n-a-b$ дает $a=b=\frac{n}{3}$. В этом случае секретарь может однозначно утверждать, что количество честных людей равно $\frac{n}{3}$.

Ответ. Секретарь не сможет определить количество четных горожан, если в зале нет хитрецов, а количество жуликов не равно количеству честных людей.

Solution (ENG). Let n be the total number of citizens in the hall, a be the number of honest ones, b be the number of tricksters. Secretary has got n sheets, among which a numbers a were assigned (written by honest citizens); b sheets show the number $n-a-b$; $n-a-b$ sheets show the number $n-a$. If $b=0$, then the secretary will count a lists with number a and $n-a$ lists with number $n-a$, and will not be able to distinguish honest people from liars when $a \neq n-a$. Thus, if $b=0$ and $n \neq 2a$, then the secretary will not be able to determine the number of honest people.
Lets consider $b>0$. Note, that the number that is written by honest citizen is always equal to the number of honest people in the hall, and the number that the liar writes is greater than the number of liars due to $n-a>n-a-b$ for $b>0$. By that, the secretary will be able to determine the number of honest people if the number of tricksters is not equal to the number of liars, i.e. $b \neq n-a-b$. In the opposite case, the secretary can distinguish the liar from the rest citizens because he knows the number of liars $n-a-b$ and looks for $n-a-b$ among the numbers written by non-liars.
If the answers of non-liars differ, then those who wrote $n-a-b$ are tricksters: thus the secretary will

find the number of honest people. If non-liars' responses are all equal, then $a = n - a - b$, which with $b = n - a - b$ gives us $a = b = \frac{n}{3}$. In this case, the secretary can state that the number of honest people is equal to $\frac{n}{3}$.

Answer: The secretary will not be able to restore the number of honest people if there are no tricksters in the hall, and the number of liars is not equal to the number of honest citizens.

Task 8. Дан правильный 100-угольник (все его стороны равны, все углы тоже равны). Докажите, что если соединить его вершины замкнутой ломаной так, чтобы в каждую вершину входило бы ровно два звена ломаной, то в этой ломаной найдутся два параллельных звена.

There is a regular polygon with 100 sides (all the sides are equal, all the angles are also equal). Prove that if we connect its vertices by a closed polyline so that each vertex contains exactly two links of the polyline, then the polyline contains two parallel segments.

Solution (RUS). Последовательно занумеруем вершины правильного 100-угольника целыми числами от 0 до 99. Тогда если k, l, m, n – номера вершин 100-угольника, то отрезки kl и mn параллельны тогда и только тогда, когда $k + l \equiv m + n \pmod{100}$.
Предположим, что в нашей ломаной нет параллельных звеньев. Пройдем по ней, складывая числа на каждом ребре. С одной стороны, мы получим сумму $2\cdot(0+1+2+\dots+99) = 9900 \equiv 0 \pmod{100}$. С другой стороны, сумма чисел на каждом отрезке ломаной должна давать свой остаток по модулю 100, поэтому та же сумма равна $0+1+\dots+99 \equiv 50 \pmod{100}$ — получили противоречие. Значит, наше предположение было неверно, и в ломаной обязательно найдутся два параллельных звена.

Solution (ENG). Lets sequentially enumerate the vertices of a regular 100-gon by integers from 0 to 99. Then the segments kl and mn are parallel if and only if $k+l \equiv m+n \pmod{100}$ (here k, l, m, n – numbers of vertices of a 100-gon).
Lets assume that there are no parallel edges in our polyline. Lets go through it, adding up the numbers on each edge. On the one hand, we get the sum $2 \cdot (0 + 1 + 2 + \dots + 99) = 9900 \equiv 0 \pmod{100}$. On the other hand, the sum of the numbers on each edge of the polyline must give its unique remainder modulo 100, thus their sum is equal to $0 + 1 + \dots + 99 \equiv 50 \pmod{100}$ — we got a contradiction. By that, our assumption was wrong, and there will definitely be two parallel edges in the polyline.

Task 9. На планете Рамануджан монетами служат титановые кубики. Длина ребра монеты-кубика – $1, 2, \dots, 8$ в местных единицах измерения, а номинал равен ее весу. Вес самой маленькой монеты – 1 *джан*. Для удобства счёта стоимость в 9 джанов называется *раману*.
Вы купили товар стоимостью в целое число раману, заплатили 3 монеты и получили сдачу – несколько (меньше 8) джанов. Если ни одна из монет не была лишней (т.е. любых двух из трех не хватило бы), то какое количество джанов сдачи вы **не смогли бы** получить? Какова минимальная стоимость товара, если вы получили сдачу в 1 джан?

On the planet Ramanujan, titanium cubes serve as coins. The length of the edge of the coin-cube is 1, 2, ..., 8 in local units, and each coin's value is equal to its weight. The weight of the smallest coin is 1 *jan*. For ease of counting, the cost of 9 jans is called *ramanu*.
You bought an item worth a positive integer number of ramanues by paying 3 coin-cubes, and received a few (less than 8) jans as a change. If none of the coins were extra (i.e. any two of the three would not be enough), then how many jans of change would you **not be able to** receive? What is the smallest value of the item if you received a change of 1 jan?

Solution (RUS). Понятно, что номиналы имеющихся монет – кубы целых чисел от 1 до 8, и нам нужно исследовать делимость таких кубов на 9:

Номер монеты (длина ребра кубика)	1	2	3	4	5	6	7	8
Номинал (в джанах)	1	8	27	64	125	216	343	512
Остаток от деления номинала на 9	1	8	0	1	8	0	1	8

Таким образом, остаток при делении куба натурального числа на 9 может быть равен только 0, 1 или 8, т.е. сдача с одной монеты, если товар стоит целое число раману, может быть только $9n$, $9n+1$ или $9n+8$ джанов, где n – целое число. Согласно условию задачи, в операции участвовали три монеты, т.е. требуется найти остатки от деления суммы трех кубов целых чисел на 9.
$0+0+0=0$; $1+0+0=1$; $1+1+0=2$; $1+1+1=3$; $8+8+8=24$ (дает остаток 6 при делении на 9); $8+8+0=16$ (дает остаток 7 при делении на 9); $8+0+0=8$. Перебором остальных вариантов убеждаемся, что сумма трех кубов не может дать остатки 4 и 5 при делении на 9.
Теперь найдем минимальную стоимость товара, если сдача составила 1 джан. Тогда стоимость трех монет при делении на 9 дает остаток 1, а это возможно в двух случаях:
1) есть две монеты достоинством в целое число раману, а стоимость третьей дает остаток 1 при делении на 9 (тогда минимальная стоимость товара равна 27+27+64-1=117 джан = 13 раману);
2) стоимости двух монет дают остаток 1 при делении на 9, а стоимость третьей – остаток 8 (тогда их минимальная стоимость равна $8+64+64-1=135$ джан= 15 раману).
Как видим, наименьшая стоимость равна 13 раману.

Ответ. Нельзя получить 4 и 5 джанов; искомая минимальная стоимость товара равна 13 раману.

Solution (ENG). It is clear that the value of the available coins are cubes of integers from 1 to 8, and we need to look at their divisibility by 9:

No. of a coin (length of its edge)	1	2	3	4	5	6	7	8
Value (in jans)	1	8	27	64	125	216	343	512
Remainder when divided by 9	1	8	0	1	8	0	1	8

Thus, the remainder when dividing the cube of an integer by 9 can only be 0, 1 or 8, i.e. change from one coin (if the product costs an integer number of ramanues) can only be $9n$, $9n+1$ or $9n+8$ jans for n being an integer. According to the initial conditions, we got three coins in the operation, i.e. we need to find the remainder after dividing the sum of three cubes of integers by 9.
$0+0+0=0$; $1+0+0=1$; $1+1+0=2$; $1+1+1=3$; $8+8+8=24$ (gives remainder 6 when divided by 9); $8+8+0=16$ (gives remainder 7 when divided by 9); $8+0+0=8$. By checking other options we make sure that the sum of three cubes cannot give the remainder of 4 and 5 when divided by 9.
Now lets find the smallest value of an item if the change was 1 jan. Then the cost of three coins gives a remainder of 1 when divided by 9, and this is possible in two cases:
1) there are two coins of an integer ramanues, and the value of the third one gives a remainder of 1 when divided by 9 (then the smallest value of the item is 27+27+64-1=117 jan = 13 ramanues);
2) the values of two coins give remainder 1 when divided by 9, and the value of the third one gives remainder 8 (then their smallest value is $8+64+64-1=135$ jans= 15 ramanues).
We see that the smallest value is 13 ramanues.

Answer: You cannot get 4 and 5 jans of change; the required smallest value of the item is 13 ramanues.

Task 10. Правильный шестиугольник $ABCDEF$ и правильный треугольник APQ не имеют общих внутренних точек. Известно, что $PB < QB$, и точка M – середина отрезка PB. Найдите угол между прямыми AM и QF.

A regular hexagon $ABCDEF$ and a regular triangle APQ have no common interior points. It is known that $PB < QB$, and the point M is the midpoint of the segment PB. Find the angle between lines AM and QF.

Solution (RUS). Отметим точку R на луче AM так, что $AR = 2{\cdot}MR$, тогда четырехугольник $APRB$ – параллелограмм. $\angle FAB + \angle BAP + \angle PAQ + \angle QAF = 360°$, $\angle FAB = 120°$, $\angle PAQ = 60°$, поэтому $\angle BAP + \angle QAF = 180°$. С другой стороны, $\angle BAP + \angle RBA = 180°$ (т.к. $BR \parallel AP$), поэтому $\angle RBA = \angle QAF$, следовательно, треугольники RBA и FAQ равны по двум сторонам и углу между ними. Обозначим за T точку пересечения прямых AM и QF, тогда $\angle ATQ = \angle AFQ + \angle TAF = \angle BAR + \angle TAF = 180° - 120° = 60°$.

Ответ. $60°$

Solution (ENG). Lets mark a point R on the ray AM so that $AR = 2{\cdot}MR$, then the quadrilateral $APRB$ is a parallelogram. $\angle FAB + \angle BAP + \angle PAQ + \angle QAF = 360°$, $\angle FAB = 120°$, $\angle PAQ = 60°$, so $\angle BAP + \angle QAF = 180°$. On the other hand, $\angle BAP + \angle RBA = 180°$ (since $BR \parallel AP$), so $\angle RBA = \angle QAF$, therefore, triangles RBA and FAQ are equal (by two sides and the angle between them). Denote by T the point of intersection of lines AM and QF, then $\angle ATQ = \angle AFQ + \angle TAF = \angle BAR + \angle TAF = 180° - 120° = 60°$.

Answer: $60°$

Task 11. Математик стоит на земле перед лестницей с n ступеньками. Когда математик поднимается, он может перешагнуть ровно через a ступенек (считая ту, на которую он наступил, и не считая ту, с которой начал движение), а когда спускается – ровно через b ступенек (аналогично, считая ту, на которую он наступил, и не считая ту, с которой начал движение).
Математик хочет с уровня земли («нулевая ступенька») подняться на самую верхнюю ступеньку и спуститься обратно на землю. Докажите, что наименьшее n, при котором это возможно, равно $a + b - (a, b)$.
Здесь (a, b) – наибольший общий делитель чисел a и b.

Mathematician is standing on the ground in front of a ladder with n stairs. When the mathematician goes up, he can step over exactly a stairs (counting the one he stepped on and not counting the one he started from), and when he goes down, he can step over exactly b stairs (similarly, counting the one he stepped on, and not counting the one from he started from).
The mathematician wants to move from the ground level («zero stair») to the highest stair, then return back to the ground. Prove that the smallest n which allows such route is $a + b - (a, b)$.
By (a, b) we denote the greatest common divisor of a and b.

Solution (RUS). При необходимости разделив a, b, n на (a, b), можно считать, что $(a, b) = 1$. Заметим, что если n не делится на (a, b), то подняться с нулевой ступеньки на верхнюю невозможно, поскольку после каждого шага математик будет стоять на ступеньке, номер которой кратен (a, b).
Сначала докажем, что $n \geq a + b - 1$. Пусть математик сумел подняться на верхнюю ступеньку и вернуться на землю, тогда найдется ступенька, в которой он побывал дважды (в частности, ступенька с номером 0), т.е. сделал цикл. Выберем среди всех таких ступенек ту, в цикле которой нет других циклов, т.е. по дороге в эту же ступеньку все остальные ступеньки пройдены не более чем по одному разу. Далее рассмотрим этот маршрут.
Если на этом маршруте математик сделал k шагов вверх (каждый – на a ступенек) и l шагов вниз (каждый – на b ступенек), то $ka = lb$, поскольку он вернулся на прежнее место. Но $(a, b) = 1$, поэтому $k \geq b$, $l \geq a$ – значит, было совершено $k + l \geq a + b$ шагов. С другой стороны, количество шагов не больше общего числа ступенек (считая нулевую), поскольку на каждую из них математик наступили не более одного раза. Значит, $n + 1 \geq k + l \geq a + b$, откуда $n \geq a + b - 1$.
Теперь докажем, что при $n = a + b - 1$ можно подняться на верхнюю ступеньку и вернуться на землю. Заметим, что на какой бы ступеньке математик не стоял, у него всегда есть возможность сделать шаг (например, со ступеньки с номером от 0 до $b-1$ – вверх на a ступенек, а со ступеньки с номером от b до $a + b - 1$ – вниз на b ступенек).

Рассмотрим диофантово уравнение $ax - by = 1$. Поскольку $(a, b) = 1$, у этого уравнения есть решение (x_0, y_0), где $0 \leq x_0 \leq b-1$, $0 \leq y_0 \leq a-1$.
Вот как должен идти математик: сначала вверх на x_0 шагов, либо пока не сможет идти дальше. После этого вниз на y_0 шагов, либо пока не сможет идти дальше, и т.д., пока не сделает совокупно x_0 шагов вверх и y_0 шагов вниз – так он сдвинется на одну ступеньку вверх. Продолжая так действовать, он поднимется на верхнюю ступеньку.
Чтобы спуститься, возьмем уравнение $bu - av = 1$ и аналогично воспользуемся его решением для построения маршрута обратно к нулевой ступеньке.

Solution (ENG). We can assume that $(a, b) = 1$ by dividing a, b, n by (a, b) if necessary. Note, that if n is not divisible by (a, b), then it is impossible to move from the zero stair to the top one, because after each step the mathematician will find himself on a stair with a number being a multiple of (a, b).
First we prove that $n \geq a + b - 1$. Let the mathematician manage to move to the top stair and return to the ground, then there is a stair that he visited twice (in particular, the stair with number 0), i.e. he made a cycle. Among all such stairs we choose the one in whose cycle there are no other cycles, i.e. on the way to the same stair all other stairs are stepped at most once. Next, consider this route.
If on this route the mathematician took k stairs up (each by a steps) and l stairs down (each by b steps), then $ka = lb$, since he returned back. But $(a, b) = 1$, so $k \geq b$, $l \geq a$ – means $k + l \geq a + b$ steps have been taken. On the other hand, the number of steps is at most the total number of stairs (counting the zero stair), since each of them was stepped on by the mathematician at most once. Thus, $n + 1 \geq k + l \geq a + b$ which leads to $n \geq a + b - 1$.
Now let's prove that for $n = a + b - 1$ you can climb the top stair and return to the ground. Note, that no matter what stair a mathematician is on, he always has the opportunity to take a step (for example, from a stair with a number from 0 to $b - 1$ he can move by a stairs up, and from a stair with a number from b to $a + b - 1$ the mathematician can move by b steps down).
Consider the Diophantine equation $ax - by = 1$. Since $(a, b) = 1$, the equation has a solution (x_0, y_0) with $0 \leq x_0 \leq b - 1$, $0 \leq y_0 \leq a - 1$.
This is how the mathematician should go: first he goes up x_0 steps, or until he can go no further. After that, he goes down y_0 steps, or until he can go no further, etc., until he takes a total of x_0 steps up and y_0 steps down – by that he moves one stair up. By continuing to do so, he will move to the top step.
To move down to the zero stair, we take the equation $bu - av = 1$ and use its solution to build a route.

8-9 класс / 8-9 degree

Task 1. В городе 50 киберспортивных клубов и N киберспортсменов, причем каждый киберспортсмен посещает 1 или 2 клуба. В каждом клубе не более 55 участников, и для любых двух клубов найдется киберспортсмен, который посещает оба. Найдите все возможные значения N.

There are 50 e-sports clubs and N e-sportsmen in the city, and each e-sportsman attends 1 or 2 of the clubs. Each club has no more than 55 of participants, and for any two clubs there is an e-sportsman who attends both. Find all possible values of N.

Solution (RUS). Количество пар клубов равно $\binom{50}{2} = \frac{50\cdot 49}{2} = 25\cdot 49 = 1225$. Это минимальное количество киберспортсменов, которые могут жить в городе, т.к. спортсмен, посещающий одну пару клубов, уже не может посещать другую, иначе он посещает не менее 3-х клубов, что противоречит условию.
Помимо этих игроков могут быть и те, которые посещают только один клуб, и в каждом клубе таких может быть не более 6-и (т.к. 49 киберспортсменов уже посещают этот клуб в паре с каким-то еще). При этом любое количество от 0 до 6 таких игроков для любого из клубов возможно.
Таким образом, в этом городе может быть любое количество киберспортсменов от 1225 до $1225 + 50 \cdot 6 = 1525$.

Ответ. От 1225 до 1525.

Solution (ENG). The number of pairs of the clubs is $\binom{50}{2} = \frac{50\cdot 49}{2} = 25 \cdot 49 = 1225$. This is the minimum number of e-sports players who can live in the city, because an e-sports player visiting one pair of clubs can no longer visit another, otherwise he visits at least 3 clubs, which contradicts initial conditions.
In addition to these players, there may be those who visit only one club, and in each club there can be no more than 6 of them (because 49 e-sportsmen already visit this club in a pair with some other). Moreover, any number of such players from 0 to 6 is possible for any of the clubs.
Thus, there can be any number of e-sportsmen in the city from 1225 to $1225 + 50 \cdot 6 = 1525$.

Answer: From 1225 to 1525.

Task 2. Точка M – середина стороны AB треугольника ABC. Точка K выбирается на отрезке AB так, что $\angle BCK = \angle ACM$. Точки P и Q на сторонах BC и AC таковы, что $KP \parallel AC$ и $KQ \parallel BC$. Докажите, что четырехугольник $BPQA$ – вписанный.

Point M is the midpoint of side AB of a triangle ABC. The point K is chosen on the segment AB in such way that $\angle BCK = \angle ACM$. Points P and Q on sides BC and AC are such that $KP \parallel AC$ and $KQ \parallel BC$. Prove that quadrilateral $BPQA$ can be inscribed in a circle.

Solution (RUS). Пусть точка $Q' \neq A$ – пересечение окружности, описанной около треугольника BPA, с прямой AC; точка N – середина отрезка PQ'. Докажем, что точки Q и Q' совпадают. Треугольники BCA и $Q'CP$ подобны (именно в таком порядке вершин), поэтому их медианы CM и CN образуют равные углы с соответствующими сторонами треугольников, следовательно, $\angle PCN = \angle ACM$, откуда заключаем, что точки C, N, K лежат на одной прямой. Треугольники PNK и $Q'NC$ равны, поэтому четырехугольник $PCQ'K$ – параллелограмм, поэтому $Q' = Q$ и четырехугольник $BPQA$ – вписанный, что и требовалось доказать.

Solution (ENG). Let the point $Q' \neq A$ be the point of intersection of the circumcircle of the triangle BPA with the line AC; the point N is the midpoint of the segment PQ'. Lets prove that the points Q and Q' coincide.
Triangles BCA and $Q'CP$ are similar (exactly in this order of vertices), so their medians CM and CN

make equal angles with the corresponding sides of the triangles, hence $\angle PCN = \angle ACM$, whence we conclude that the points C, N, K lie on a line. Triangles PNK and $Q'NC$ are equal, so quadrilateral $PCQ'K$ is a parallelogram, thus $Q' = Q$ and quadrilateral $BPQA$ is an inscribed one, which was to be proved.

Task 3. Найдите все функции $f(x)$, которые при любых $x \in (-\infty; 0) \cup (0; 1) \cup (1; +\infty)$ удовлетворяют равенству

$$f(x) + f\big(\frac{1}{1-x}\big) = x$$

Find all functions $f(x)$ that for any $x \in (-\infty; 0) \cup (0; 1) \cup (1; +\infty)$ satisfy

$$f(x) + f\big(\frac{1}{1-x}\big) = x$$

Solution (RUS). Подставив в исходное уравнение $\frac{1}{1-x}$ вместо x, получим для $f(x)$ и всех $x \in (-\infty; 0) \cup (0; 1) \cup (1; +\infty)$ равенство $f\big(\frac{1}{1-x}\big) + f\big(\frac{x-1}{x}\big) = \frac{1}{1-x}$. Подставляя в последнее равенство $\frac{1}{1-x}$ вместо x, получим равенство $f\big(\frac{x-1}{x}\big) + f(x) = \frac{x-1}{x}$, определенное для тех же x. Итак, исходное уравнение равносильно системе

$$\begin{cases} f(x) + f\big(\frac{1}{1-x}\big) = x \\ f\big(\frac{1}{1-x}\big) + f\big(\frac{x-1}{x}\big) = \frac{1}{1-x} \\ f\big(\frac{x-1}{x}\big) + f(x) = \frac{x-1}{x} \end{cases}$$

Сложив первое равенство с третьим, затем вычтя второе и разделив полученное равенство на 2, получим $f(x) = \frac{x^3-x+1}{2(x^2-x)}$. Непосредственной проверкой можно убедиться, что найденная функция удовлетворяет исходному равенству.

Ответ. $f(x) = \frac{x^3-x+1}{2(x^2-x)}$

Solution (ENG). Substituting $\frac{1}{1-x}$ instead of x into the original equation, we obtain an equality $f\big(\frac{1}{1-x}\big) + f\big(\frac{x-1}{x}\big) = \frac{1}{1-x}$ for $f(x)$ and all $x \in (-\infty; 0) \cup (0; 1) \cup (1; +\infty)$. Substituting $\frac{1}{1-x}$ instead of x into the last equality, we obtain $f\big(\frac{x-1}{x}\big) + f(x) = \frac{x-1}{x}$ for the same x. So, the original equation is equivalent to the system

$$\begin{cases} f(x) + f\big(\frac{1}{1-x}\big) = x \\ f\big(\frac{1}{1-x}\big) + f\big(\frac{x-1}{x}\big) = \frac{1}{1-x} \\ f\big(\frac{x-1}{x}\big) + f(x) = \frac{x-1}{x} \end{cases}$$

By adding the first equality to the third one, then subtracting the second one and dividing the resulting equality by 2, we get $f(x) = \frac{x^3-x+1}{2(x^2-x)}$. We can make sure that the function satisfies the initial equality by checking it directly.

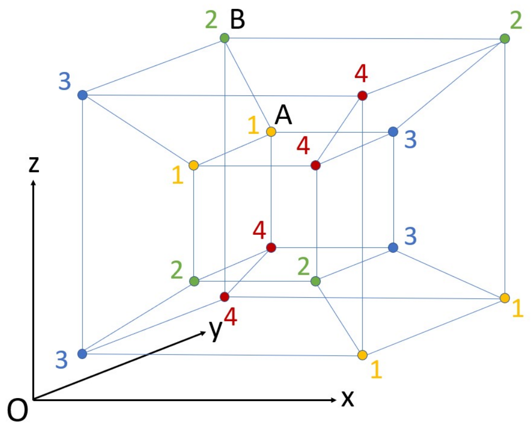
Answer: $f(x) = \frac{x^3-x+1}{2(x^2-x)}$

Task 4. Султан поймал двоих математиков и сказал им:
«Завтра в каждом из четырех углов этого зала я поставлю по сундуку, на каждом из которых будет написано какое-то целое число, и первый из вас будет тому свидетелем. На его глазах в один из этих сундуков я положу ключ от вашей тюрьмы, и первый из вас должен будет увеличить на единицу число, написанное на одном из сундуков по его выбору.
Затем я уведу этого человека и, не двигая сундуки, приведу второго, и он должен будет с первой попытки угадать, в каком сундуке ключ. Если угадает – вы оба свободны, если же он не справится – значит, оба останетесь в моей тюрьме навсегда. А пока идите в свою камеру и думайте, можете ли спастись».
Как должны действовать математики, чтобы гарантированно спастись? Учтите, что завтра у них

не будет возможности переговариваться друг с другом.

Sultan caught two mathematicians and told them:
«Tomorrow I will place a chest in each of the four corners of this hall. On each of the chests some integer will be written, and the first of you will be a witness to this. Before his eyes I will place the key to your prison in one of these chests. The first of you will have to increase by 1 the number written on one of the chests of his choice.
Then I will take the first of you away and I will bring the second of you without moving the chests, and the second of you will have to guess (with the first attempt) which chest the key is in. If he guesses correctly, you are both free, but if he fails, then both of you will remain in my prison forever. Now go to your cell and think how you can escape».
How should mathematicians proceed in order to be guaranteed to get free? Keep in mind that tomorrow they will not have the opportunity to talk to each other.

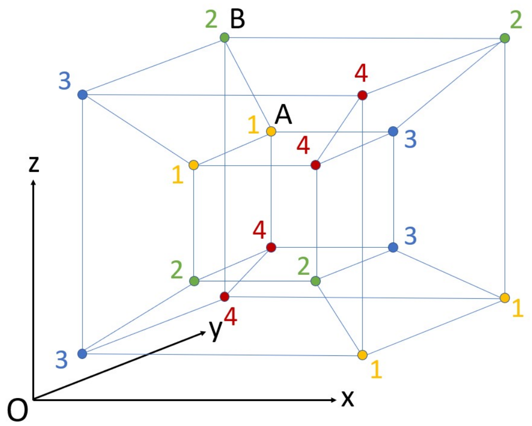
Solution (RUS). Опишем один из алгоритмов, согласно которому должны действовать математики, чтобы спастись.
Предварительно (в ночь перед угадыванием сундука) математики договариваются о том, в каком порядке нумеровать сундуки (например, по часовой стрелке, начиная от сундука в ближнем левом углу зала), т.е. устанавливают взаимооднозначное соответствие между сундуками и числами 1,2,3,4.
На следующий день первый математик, узнавший, в каком сундуке ключ, и видящий все числа на сундуках, берет их остатки при делении на 2. Он должен увеличить одно из чисел, написанных на сундуках, на единицу (тем самым изменив его остаток при делении на 2: 0 на 1 , а 1 – на 0), а второй математик по четности четырех чисел на сундуках должен определить, в каком сундуке ключ.
Далее будем вместо четных чисел писать 0, а вместо нечетных – 1; всего существует 16 четверок (x, y, z, t), где $x, y, z, t \in \{0; 1\}$. Каждой четверке целых чисел, написанных на сундуках, соответствует одна из упомянутых 16-и четверок (x, y, z, t), причем после прибавления единицы к одному из чисел на сундуках мы получаем другую четверку. Изобразим эти четверки в виде вершин четырехмерного куба, переход по любому ребру которого соответствует прибавлению единицы к одному из чисел на сундуках (переход по первой координате соответствует движению по ребру, параллельному оси Ox, по второй координате – Oy, по третьей – Oz, по четвертой – переход между «внешним» и «внутренним» кубами):



Каждой вершине куба соответствует число от 1 до 4 – номер сундука, который таким образом узнает второй математик, что позволит обоим спастись. Заметим, что из любой вершины можно пройти по одному из ребер так, чтобы оказаться в вершине с любым числом от 1 до 4, что позволяет первому математику «зашифровать» номер любого сундука.
Вот пример того, как это может произойти: пусть султан написал на сундуках числа -120, 43, 9779, -630081. Первый математик берет остатки при делении этих чисел на 2 и получает четверку $(0, 1, 1, 1)$, *которая соответствует вершине A гиперкуба (см. рис.). Далее султан кладет ключ в один*

из этих сундуков – например, во 2-й. Тогда первый математик «проходит» по ребру AB куба, т.е. прибавляет единицу к числу -630081 (соответствующего переходу по 4-й координате, поскольку вершине B соответствует четверка $(0,1,1,0)$, отличающаяся от $A(0,1,1,1)$ только 4-й координатой). После этого второй математик видит числа -120, 43, 9779, -630080, которым соответствует четверка $(0,1,1,0)$, которой соответствует вершина B, которой, в свою очередь, соответствует число 2 (о соответствии номеров сундуков и вершин гиперкуба математики тоже договариваются заранее). Так второй математик понимает, что ключ находится во 2-м сундуке, и указывает на него.

Solution (ENG). Lets describe one of the ways for mathematicians to get free.
Previously (on the night before guessing the chest), mathematicians discuss the order which to number the chests in (for example, clockwise, starting from the chest in the near left corner of the hall), i.e. establish a one-to-one correspondence between chests and numbers 1,2,3,4.
The next day, the first mathematician who knows which chest contains the key and sees all the integers on the chests takes their remainders when divided by 2. He must increase one of the integers by 1 (thus changing its remainder when divided by 2: 0 to 1, and 1 to 0), and the second mathematician must determine which chest contains the key by the evenness of the four numbers on the chests.
Further, we'll write 0 instead of even numbers, and 1 instead of odd numbers; there are 16 quadruples (x, y, z, t), where $x, y, z, t \in \{0; 1\}$. Each quadruple of integers written on the chests corresponds to one of the mentioned 16 quadruples (x, y, z, t), and after adding 1 to one of the numbers on the chests we get another quadruple. Let's depict these quadruples as vertices of a four-dimensional cube. Transition along any edge of the hypercube corresponds to adding 1 to one of the numbers on the chests (the transition along the first coordinate corresponds to the movement along the edge parallel to the Ox axis, along the second coordinate – Oy, along the third – Oz, along the fourth – the transition between «outer» and «inner» cubes):



Each vertex of the hypercube corresponds to an integer from 1 to 4 – the number of the chest, which the second mathematician will thus recognize, and that will allow both to escape. Note, that from any vertex we can go along one of the edges to end up at a vertex with any number from 1 to 4, which allows the first mathematician to «encrypt» the number of any chest.
Here is an example of how this can happen: let the sultan write the numbers -120, 43, 9779, -630081 on the chests. The first mathematician takes the remainders when dividing these numbers by 2 and gets the quadruple $(0,1,1,1)$, which corresponds to the vertex A of the hypercube (see the picture above). Next, the sultan puts the key in one of these chests – for example, in the 2-nd one. Then the first mathematician «goes» along the edge AB of the hypercube, i.e. adds 1 to the number -630081 (corresponding to the transition along the 4-th coordinate, since the vertex B corresponds to the quadruple $(0,1,1,0)$, which differs from $A(0,1,1,1)$ only the 4-th coordinate). After that, the second mathematician sees the numbers -120, 43, 9779, -630080, which correspond to the quadruple $(0,1,1,0)$, which corresponds to the vertex B, which, in turn, corresponds to the number 2 (about the correspondence between the numbers of chests and vertices of the hypercube mathematicians also agree in advance). Thus, the second mathematician understands that the key is in the 2-nd chest, and points to it.

Task 5. Параболы, заданные уравнениями $y = x^2 - a$ и $x = y^2 - b$, пересекаются в четырех различных точках $P_i(x_i, y_i)$, где $i = 1, 2, 3, 4$. Вычислите значение выражения

$$(x_1 + x_2)(x_1 + x_3)(x_1 + x_4)$$

The parabolas defined by the equations $y = x^2 - a$ and $x = y^2 - b$ intersect at four distinct points $P_i(x_i, y_i)$ for $i = 1, 2, 3, 4$. Calculate the value of the expression

$$(x_1 + x_2)(x_1 + x_3)(x_1 + x_4)$$

Solution (RUS). Заметим, что числа x_1, x_2, x_3, x_4 являются корнями многочлена $f(x) = (x^2 - a)^2 - b - x$. Перепишем этот многочлен в виде $f(x) = x^4 - 2ax^2 - x + a^2 - b$.
Если $x_1 = 0$, то x_2, x_3, x_4 – корни многочлена $f_1(x) = \frac{f(x)}{x} = x^3 - 2ax - 1$, и по теореме Виета имеем

$$(x_1 + x_2)(x_1 + x_3)(x_1 + x_4) = x_2x_3x_4 = 1$$

Если же $x_1 \neq 0$, то

$$(x_1 + x_2)(x_1 + x_3)(x_1 + x_4) = \frac{(x_1 + x_1)(x_1 + x_2)(x_1 + x_3)(x_1 + x_4)}{x_1 + x_1} = \frac{f(-x_1)}{2x_1} = \frac{f(x_1) + 2x_1}{2x_1} = 1$$

Итак, в обоих случаях $(x_1 + x_2)(x_1 + x_3)(x_1 + x_4) = 1$.

Ответ. 1

Solution (ENG). Note, that the numbers x_1, x_2, x_3, x_4 are the roots of the polynomial $f(x) = (x^2 - a)^2 - b - x$. Lets rewrite this polynomial in the following form: $f(x) = x^4 - 2ax^2 - x + a^2 - b$.
If $x_1 = 0$, then x_2, x_3, x_4 are the roots of the polynomial $f_1(x) = \frac{f(x)}{x} = x^3 - 2ax - 1$, and by Vieta's formula we have

$$(x_1 + x_2)(x_1 + x_3)(x_1 + x_4) = x_2x_3x_4 = 1$$

If $x_1 \neq 0$, then

$$(x_1 + x_2)(x_1 + x_3)(x_1 + x_4) = \frac{(x_1 + x_1)(x_1 + x_2)(x_1 + x_3)(x_1 + x_4)}{x_1 + x_1} = \frac{f(-x_1)}{2x_1} = \frac{f(x_1) + 2x_1}{2x_1} = 1$$

Thus, in both cases $(x_1 + x_2)(x_1 + x_3)(x_1 + x_4) = 1$.

Answer: 1

10-11 класс / 10-12 degree

Task 1. Все марсиане делятся на одноглазых, двуглазых и трехглазых. Марсианин отдыхает только тогда, когда закрыт хотя бы один его глаз, причем каждую секунду каждый глаз может быть открыт с вероятностью 0.5 независимо от остальных.
Известно, что среди всех марсиан, у которых не меньше двух глаз, каждую секунду в среднем 80% отдыхают, а среди тех, у которых не больше двух глаз, каждую секунду отдыхают в среднем $\frac{2}{3}$ марсиан. Найдите долю двуглазых марсиан среди всех марсиан.

Every Martian has either one, two or three eyes. A Martian rests only when at least one of his eyes is closed, and every second each eye can be open with a probability of 0.5, regardless of the other eyes. It is known that among all Martians who have at least two eyes, on average 80% rest at any given second, and among those who have no more than two eyes, on average $\frac{2}{3}$ Martians rest at any given second. Find the proportion of two-eyed Martians among all Martians.

Solution (RUS). Пусть n_k – количество марсиан, у которых k глаз ($k = 1, 2, 3$). Такой марсианин каждую секунду отдыхает с вероятностью $1 - 0.5^k$, поскольку события «марсианин отдыхает» и «все глаза марсианина открыты» образуют полную группу событий, поэтому сумма их вероятностей равна 1. Сначала рассмотрим случай, когда $n_2 \neq 0$.
Тогда вероятность того, что наугад выбранный марсианин, у которого не больше двух глаз, отдыхает, равна $\frac{2}{3} = \frac{(1-0.5)n_1+(1-0.5^2)n_2}{n_1+n_2} = 1 - 0.5 \cdot \frac{n_1+0.5n_2}{n_1+n_2}$. Аналогичная вероятность для марсиан, у которых не меньше двух глаз, равна $0.8 = \frac{(1-0.5^2)n_2+(1-0.5^3)n_3}{n_2+n_3} = 1 - 0.25 \cdot \frac{n_2+0.5n_3}{n_2+n_3}$. Разделим числители и знаменатели полученных дробей на $n_2 \neq 0$ и обозначим $x = \frac{n_1}{n_2}, y = \frac{n_3}{n_2}$ (тогда искомое отношение $\frac{n_2}{n_1+n_2+n_3}$ преобразуется к виду $\frac{1}{x+y+1}$). Получим систему уравнений

$$\begin{cases} 0.5x + 0.25 = \frac{1}{3}(x+1) \\ 0.125y + 0.25 = 0.2(y+1) \end{cases},$$

откуда $x = 0.5$, $y = \frac{2}{3}$ и $\frac{1}{x+y+1} = \frac{6}{13}$.
Теперь рассмотрим случай, когда $n_2 = 0$. Тогда доля отдыхающих марсиан среди тех, у кого не больше двух глаз, должна быть равна доле отдыхающих одноглазых марсиан, т.е. 0.5. Однако, согласно условию, эта доля равна $\frac{2}{3} \neq 0.5$ – получили противоречие, значит, $n_2 \neq 0$.

Ответ. $\frac{6}{13}$

Solution (ENG). Let n_k be the number of Martians who have k eyes ($k = 1, 2, 3$). Such a Martian has a rest at each second with a probability of $1 - 0.5^k$, since the events «Martian is resting» and «all Martian's eyes are open» form a complete group of events, so the sum of their probabilities is 1. First let's consider the case when $n_2 \neq 0$.
Then the probability that a randomly selected Martian with no more than two eyes rests is $\frac{2}{3} = \frac{(1-0.5)n_1+(1-0.5^2)n_2}{n_1+n_2} = 1 - 0.5 \cdot \frac{n_1+0.5n_2}{n_1+n_2}$. A similar probability for Martians with at least two eyes is $0.8 = \frac{(1-0.5^2)n_2+(1-0.5^3)n_3}{n_2+n_3} = 1 - 0.25 \cdot \frac{n_2+0.5n_3}{n_2+n_3}$. Lets divide the numerators and denominators of the resulting fractions by $n_2 \neq 0$ and denote $x = \frac{n_1}{n_2}, y = \frac{n_3}{n_2}$ (then the required ratio $\frac{n_2}{n_1+n_2+n_3}$ is being noted as $\frac{1}{x+y+1}$). We get a system of equations

$$\begin{cases} 0.5x + 0.25 = \frac{1}{3}(x+1) \\ 0.125y + 0.25 = 0.2(y+1) \end{cases},$$

thus $x = 0.5$, $y = \frac{2}{3}$ and $\frac{1}{x+y+1} = \frac{6}{13}$.
Now let's consider the case when $n_2 = 0$. Then the ratio of resting Martians among those who have no more than two eyes ($\frac{2}{3}$) should be equal to the ratio of resting one-eyed Martians (0.5). They are not equal and by that we get a contradiction, thus $n_2 \neq 0$.

Answer: $\frac{6}{13}$

Task 2. Проводится шахматный турнир, в котором участвуют n человек ($n > 2$). Из-за эпидемической обстановки партии проходят в отдельных помещениях, причем в каждом помещении шахматист может играть только фигурами одного цвета.
Например, если Иван играл черными фигурами в помещении №1, то он уже не сможет сыграть белыми фигурами в этом помещении. Аналогично, если участник играл белыми фигурами в помещении №5, то в этом же помещении он уже не сможет играть черными фигурами. При этом он может снова играть белыми фигурами в помещении №5.
Известно, что каждый участник турнира должен сыграть с любым другим участником ровно одну партию. Организаторы хотят составить такое расписание, чтобы задействовать минимально возможное число помещений. Докажите, что это число равно $[\log_2 n] + 1$.
Здесь $[x]$ – целая часть числа x, т.е. наибольшее целое число, не превосходящее x.

A chess tournament is being held with n participants ($n > 2$). Due to the epidemic situation, the tournament's games are played in separate rooms, and in each room a chess player can only play pieces of the same color.
For example, if Ivan played with black pieces in room number 1, then he will no longer be able to play with white pieces in this room. Similarly, if a participant played with white pieces in room number 5, then he will no longer be able to play with black pieces in the room, but he can play another game with white pieces in this room.
It is known that each participant of the tournament must play exactly one game with any other participant. The organizers of the tournament want to make such a schedule to use the smallest possible number of rooms. Prove that the number is equal to $[\log_2 n] + 1$.
Here $[x]$ is a floor function of x, i.e. greatest integer less than or equal to x.

Solution (RUS). Утверждение, которое требуется доказать, неверно: на самом деле искомое число равно $\lceil \log_2 n \rceil$, что при $n = 2^k$ (для натуральных $k > 1$) отличается от заявленного в условии. Участники были предупреждены об этой ошибке, и от них требовалось найти минимальное число помещений для каждого $n > 2$.
Пусть $f(n)$ – искомое число помещении в зависимости от количества n участников турнира. Сначала докажем индукцией по $\lceil \log_2 n \rceil$, что $f(n) \geq \lceil \log_2 n \rceil$ (здесь $\lceil x \rceil$ – функция взятия целой части числа с округлением «вверх»). База (для $n = 3$ и $n = 4$) очевидна.
Зафиксируем помещение (например, №1) и обозначим через U_1 множество шахматистов (вершин графа, каждое ребро которого соответствует определенной партии), которые играли в этом помещении белыми фигурами. Аналогично, обозначим за U_2 множество шахматистов, которые НЕ играли в этом помещении белыми фигурами. Множества U_1 и U_2 не пересекаются – значит, хотя бы одно из них (без ограничения общности будем считать, что это U_1) содержит не более $n/2$ элементов, остальные шахматисты (их не менее $n/2$) не играли белыми фигурами в помещении №1 – значит, им для этого хватило $f(n) - 1$ помещений: $f(n) - 1 \geq f(\lceil n/2 \rceil) \geq \lceil \log_2(\lceil n/2 \rceil) \rceil$, откуда $f(n) \geq \lceil \log_2 n \rceil$.
Покажем, как сделать «правильное» (т.е. соответствующее условию задачи) расписание с $f(n) = \lceil \log_2 n \rceil$. Для этого занумеруем вершины графа (т.е. шахматистов) числами от 0 до $n - 1$ и ориентируем ребра графа (т.е. партии) ij, если $i > j$ (шахматист i играет белыми, а j – черными), а помещения занумеруем числами от 0 до $\lceil \log_2 n \rceil$. Ребру ij поставим в соответствие номер k, который определяется как наибольшее k, такое, что в двоичной записи числа i на k-м месте стоит 1, а у числа j – 0. Такое k существует, поскольку $i \neq j$. Кроме того, в двоичных разложениях i, j не более $\lceil \log_2 n \rceil$ цифр, откуда $k \leq \lceil \log_2 n \rceil$.
Осталось проверить, что ребрам ij и jl соответствуют разные номера. Действительно, если бы им соответствовал общий номер k, то у числа j в k-м разряде двоичной записи стояла бы и цифра 0 (из-за ребра ij), и цифра 1 (из-за ребра jl), что невозможно.

Solution (ENG). The statement to be proven is false: in fact, the required number is equal to $\lceil \log_2 n \rceil$, which for $n = 2^k$ (for positive integers $k > 1$) differs from the one declared in the task formulation. Participants were warned about this error and were required to find the minimum number of rooms for each $n > 2$.
Let $f(n)$ be the desired number of rooms depending on the number n of participants of the tournament. First we prove by induction on $\lceil \log_2 n \rceil$ that $f(n) \geq \lceil \log_2 n \rceil$ ($\lceil x \rceil$ is a ceil function of x). The base (for $n = 3$ and $n = 4$) is obvious.
We fix a room (for example, room number 1) and denote by U_1 the set of chess players (the vertices of the graph, each edge of which corresponds to a certain game) who played in this room with white pieces. Let U_2 denote the set of chess players who did NOT play in this room with white pieces. According to the initial condition, the sets U_1 and U_2 do not intersect, which means that at least one of them (without loss of generality we will assume that this is U_1) contains no more than $n/2$ elements, and the rest of participants (there are no less than $n/2$) didn't play with white pieces in room 1 – it means that $f(n) - 1$ of rooms were enough for them: $f(n) - 1 \geq f(\lceil n/2 \rceil) \geq \lceil \log_2(\lceil n/2 \rceil) \rceil$, thus $f(n) \geq \lceil \log_2 n \rceil$.
Lets show how to make a «correct» (that is, satisfying conditions of the task) schedule with $f(n) = \lceil \log_2 n \rceil$. To do that, we enumerate the vertices of the graph (i.e. chess players) with numbers from 0 to $n-1$ and orient the edges of the graph (i.e. games) ij if $i > j$ (chess player i plays with white pieces, and the one with number j plays with black pieces), and enumerate the rooms with numbers from 0 to $\lceil \log_2 n \rceil$. We associate the edge ij with a number k which is defined as the largest k, such that the number i has 1 in the k-th place of its binary notation, and the number j has 0 in the same place of its binary notation. Such k exists because $i \neq j$. Moreover, the binary notations of i, j have at most $\lceil \log_2 n \rceil$ digits, thus $k \leq \lceil \log_2 n \rceil$.
It remains to verify that the edges ij and jl correspond to different numbers. Indeed, if they had a common number k, then j would have both the digit 0 (because of the edge ij) and the number 1 (because of the edge jl) at the same place of its binary notation, but that is impossible.

Task 3. Два игрока играют в игру: они по очереди вытаскивают камни из кучки, в которой изначально было n камней. В свой первый ход первый игрок берет из кучи один или несколько камней, но не может забрать все камни. Каждым следующим ходом очередной игрок должен забрать из кучи количество камней, являющееся делителем числа камней, забранного противником на предыдущем ходу, и не превосходящее числа камней в куче. Выигрывает тот, кто заберет последний камень. Для каждого $n > 1$ определите, у кого из соперников есть выигрышная стратегия.

Two players play a game: they take turns picking stones from a pile that originally contained n stones. On his first turn the first player takes one or more stones from the pile, but cannot take all of the stones. On each next move a player must take the number of stones from the pile, which is a divisor of the number of stones taken by the opponent on the previous move, and does not exceed the number of stones in the pile. The one who takes the last stone wins the game. Determine for each $n > 1$ which of the opponents has a winning strategy.

Solution (RUS). Заметим, что если в куче нечетное число камней, то первый игрок гарантирует себе победу, взяв на первом ходу 1 камень: тогда каждым следующим ходом игроки будут забирать по одному камню, и последний камень заберет первый игрок. Когда n чётно, тот, кто первым сделает нечетный шаг, проиграет: такой шаг был сделан из четного числа – значит, он не будет последним, а противник заберет один камень, что и обеспечит ему победу.
Если $n = 2$, то второй игрок, очевидно, побеждает. Если $n = 3$, то побеждает первый игрок, забирая первым ходом 1 камень. Если $n = 4$, то побеждает второй игрок: если первый берет 1 камень, то второй возьмет последний камень, а если первый игрок первым ходом берет 2 или 3 камня, то второй игрок первым своим ходом забирает остальные камни.
Докажем по индукции, что для всех четных n от $2^{k-1} + 1$ до $2^k - 1$ (для натурального $k \geq 2$) побеждает первый игрок, а для $n = 2^k$ – второй. База индукции ($k = 2$) разобрана выше.

Пусть $2^{k-1}+1 \le n \le 2^k-1$ для натурального $k \ge 3$. Тогда первый игрок сводит игру к таковой с $n/2$ камнями (т.е. берет вдвое больше камней, чем взял бы в игре с $n/2$ камнями), где у него есть победная стратегия согласно предположению индукции, поскольку $2^{k-2}+1 \le n/2 \le 2^{k-1}-1$. Единственный способ помешать ему – взять нечетное число камней, но, как показано выше, тот, кто первым возьмет нечетное число камней, проигрывает.
Пусть теперь $n = 2^k$ для $k \ge 3$. Тогда уже второй игрок применяет стратегию «половинчатой» игры, т.е. берет в 2 раза больше камней, чем взял бы в игре с $n/2$ камнями. Согласно предположению индукции, это обеспечит ему победу.

Ответ. При $n = 2^k$ (для $k \in \mathbb{N}$) второй игрок может гарантировать себе победу. При прочих $n > 1$ выигрышная стратегия есть у первого игрока.

Solution (ENG). Note, that if there is an odd number of stones in the pile, then the first player guarantees himself a victory by taking 1 stone on the first move: then each next move the players will take 1 stone, and the last stone will be taken by the first player. When n is even, the first one to make an odd step will lose: such a step was made from an even number – so it will not be the last one, and the opponent will immediately take 1 stone, which will ensure his victory.
If $n = 2$, then the second player wins obviously. If $n = 3$, then the first player wins by taking 1 stone on the first move. If $n = 4$, then the second player wins: if the first player takes 1 stone, then the second player takes the last stone, and if the first player takes 2 or 3 stones on the first move, then the second player takes the remaining ones.
Lets prove by induction that for all even n from $2^{k-1}+1$ to 2^k-1 (while $k \ge 2$ is an integer) the first player wins, and for $n = 2^k$ so does the second player. The base of induction ($k = 2$) has been shown above.
Let $2^{k-1}+1 \le n \le 2^k-1$ for integer $k \ge 3$. Then the first player reduces the game to that with $n/2$ stones (i.e. he takes twice as many stones as he would take in the game with $n/2$ stones), where he has a winning strategy according to the induction hypothesis, since $2^{k-2}+1 \le n/2 \le 2^{k-1}-1$. The only way to stop him is to take an odd number of stones, but as shown above, whoever is the first to take an odd number of stones loses.
Let now $n = 2^k$ for $k \ge 3$. Then the second player applies his strategy of the game with $n/2$ stones, i.e. he takes 2 times more stones than he would take in the game with $n/2$ stones. According to the induction hypothesis, this will ensure his victory.

Answer: For $n = 2^k$ (for $k \in \mathbb{N}$) the second player can guarantee his victory. For other $n > 1$, the first player has a winning strategy.

Task 4. Назовем бесконечную числовую последовательность $\{a_n\}$ *стабилизирующейся*, если при некотором k_0 для всех $k \ge k_0$ выполнено $a_k = a_{k+1}$. Тогда k_0 назовем *временем стабилизации*, a_k (при $k \ge k_0$) – *стабильным значением*.
Пусть a, b – натуральные числа. Дана последовательность $\{x_n\}$, в которой $x_1 = x_2 = x_3 = a$ и для любого натурального n выполнены равенства $x_{3n+1} = b \cdot x_{3n-2}$, $x_{3n+2} = x_{3n-1} \circ b$ *(здесь $\circ b$ – это операция взятия целой части при делении на b)*, $x_{3n+3} = x_{3n} + x_{3n-2} \cdot \big(x_{3n-1} \pmod b\big)$ *(здесь $\pmod b$ – операция взятия остатка от деления на b)*.
Какие из последовательностей $\{x_{3n+1}\}$, $\{x_{3n+2}\}$, $\{x_{3n}\}$ ($n \in \mathbb{N}$) стабилизируются, и чему равны их стабильные значения? Чему равно время стабилизации последовательности $\{x_{3n}\}$?

We call an infinite number sequence $\{a_n\}$ *stabilizing* if $a_k = a_{k+1}$ for some k_0 and for all $k \ge k_0$. Then k_0 will be called *stabilization time*, and a_k (for $k \ge k_0$) will be called *stable value*.
Let a, b be positive integers. There is a sequence $\{x_n\}$ which has $x_1 = x_2 = x_3 = a$ and for any positive integer n it satisfies the equalities $x_{3n+1} = b \cdot x_{3n-2}$, $x_{3n+2} = x_{3n-1} \circ b$ *(here $\circ b$ is the operation of taking the whole part when dividing by b)*, $x_{3n+3} = x_{3n} + x_{3n-2} \cdot \big(x_{3n-1} \pmod b\big)$ *(here $\pmod b$ is the operation of taking the remainder of division by b)*.
Which of the sequences $\{x_{3n+1}\}$, $\{x_{3n+2}\}$, $\{x_{3n}\}$ ($n \in \mathbb{N}$) stabilizes, and what are their stable values? What is the stabilization time for the sequence $\{x_{3n}\}$?

Solution (RUS). Сначала рассмотрим последовательность $\{x_{3n+1}\}$. По ее определению имеем $x_{3n+1} = a \cdot b^n$ для всех целых $n \geq 0$ – значит, при $b = 1$ ее стабильное значение равно a, а при $b > 1$ она не стабилизируется.
Теперь рассмотрим $\{x_{3n+2}\}$. По определению, если $b = 1$, то $x_{3n+2} = a$ для всех целых $n \geq 0$, а если $b > 1$, то $x_{3n+2} \leq \frac{a}{b^n}$ и, поскольку последовательность – целочисленная, имеем $x_{3n+2} = 0$ для всех n, начиная с $\lceil \log_b a \rceil$ (целая часть от логарифма, взятая с избытком).
Докажем по индукции, что $x_{3n+1} \cdot x_{3n+2} + x_{3n+3} = a^2 + a$ для всех целых $n \geq 0$. База индукции ($n = 0$): $x_1 \cdot x_2 + x_3 = a^2 + a$ по определению. Индукционная гипотеза: пусть для некоторого $m \geq 0$ выполнено $x_{3m+1} \cdot x_{3m+2} + x_{3m+3} = a^2 + a$.
Тогда $x_{3(m+1)+1} \cdot x_{3(m+1)+2} + x_{3(m+1)+3} = (b \cdot x_{3m+1}) \cdot (x_{3m+2} \circ b) + \big(x_{3m+3} + x_{3m+1}(x_{3m+2} \pmod b)\big) = \big((b \cdot x_{3m+1}) \cdot (x_{3m+2} \circ b) + x_{3m+1}(x_{3m+2} \pmod b)\big) + x_{3m+3} = x_{3m+1} \cdot x_{3m+2} + x_{3m+3} = a^2 + a$, что и требовалось доказать.
Наконец, рассмотрим последовательность $\{x_{3n}\}$. В силу доказанного выше, если $b = 1$, то все члены последовательности $\{x_{3n}\}$ равны a, а если $b > 1$, то $x_{3n+3} = x_{3n+1} \cdot 0 + x_{3n+3} = x_{3n+1} \cdot x_{3n+2} + x_{3n+3} = a^2 + a$, начиная с $n = \lceil \log_b a \rceil$, следовательно, стабильное значение последовательности $\{x_{3n}\}$ равно $a^2 + a$.

Ответ. Последовательность $\{x_{3n+1}\}$ стабилизируется на a при $b = 1$;
$\{x_{3n+2}\}$ стабилизируется на a при $b = 1$ и на 0 при $b > 1$;
$\{x_{3n}\}$ стабилизируется на a при $b = 1$, начиная с $n = 1$, и на $a^2 + a$ при $b > 1$, начиная с $n = \lceil \log_b a \rceil$.

Solution (ENG). Lets consider the sequence $\{x_{3n+1}\}$. By its definition, we have $x_{3n+1} = a \cdot b^n$ for all integers $n \geq 0$ – thus, for $b = 1$ its stable value is equal to a, and for $b > 1$ the sequence does not stabilize.
Now lets consider $\{x_{3n+2}\}$. By its definition, if $b = 1$, then $x_{3n+2} = a$ for all integers $n \geq 0$, and if $b > 1$, then $x_{3n+2} \leq \frac{a}{b^n}$ and since the sequence is integer, we have $x_{3n+2} = 0$ for all n from $\lceil \log_b a \rceil$ (the ceil function of the logarithm).
Lets prove by induction that $x_{3n+1} \cdot x_{3n+2} + x_{3n+3} = a^2 + a$ for all integers $n \geq 0$. Base of induction ($n = 0$): $x_1 \cdot x_2 + x_3 = a^2 + a$ by definition. Induction hypothesis: let $x_{3m+1} \cdot x_{3m+2} + x_{3m+3} = a^2 + a$ hold for some $m \geq 0$.
Then $x_{3(m+1)+1} \cdot x_{3(m+1)+2} + x_{3(m+1)+3} = (b \cdot x_{3m+1}) \cdot (x_{3m+2} \circ b) + \big(x_{3m+3} + x_{3m+1}(x_{3m+2} \pmod b)\big) = \big((b \cdot x_{3m+1}) \cdot (x_{3m+2} \circ b) + x_{3m+1}(x_{3m+2} \pmod b)\big) + x_{3m+3} = x_{3m+1} \cdot x_{3m+2} + x_{3m+3} = a^2 + a$, which was to be proved.
Finally, we consider the sequence $\{x_{3n}\}$. By the statements proved above, if $b = 1$ then all members of the sequence $\{x_{3n}\}$ are equal to a, and if $b > 1$ then $x_{3n+3} = x_{3n+1} \cdot 0 + x_{3n+3} = x_{3n+1} \cdot x_{3n+2} + x_{3n+3} = a^2 + a$ from $n = \lceil \log_b a \rceil$, thus the stable value of the sequence $\{x_{3n}\}$ is $a^2 + a$.

Answer: The sequence $\{x_{3n+1}\}$ stabilizes on a for $b = 1$;
$\{x_{3n+2}\}$ stabilizes on a for $b = 1$ and on 0 for $b > 1$;
$\{x_{3n}\}$ stabilizes on a for $b = 1$ from $n = 1$, and on $a^2 + a$ for $b > 1$ from $n = \lceil \log_b a \rceil$.

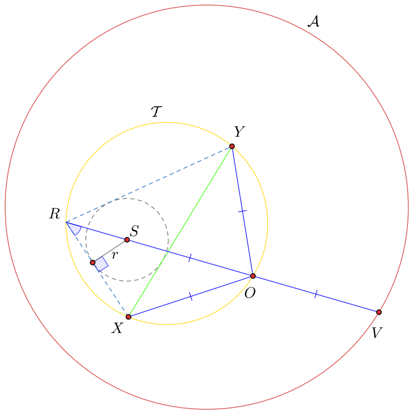
Task 5. Олег и Оливер гоняют на велосипедах с одинаковыми угловыми скоростями: Оливер – по круговой траектории $\mathcal{A}$, а Олег – по круговой траектории $\mathcal{T}$ в два раза меньшего радиуса, причем они стартуют с двух ближайших точек окружностей и круг Олега лежит внутри круга Оливера. По окружности $\mathcal{T}$ также движутся два помощника, поддерживающих экран (т.е. хорду с концами в точках, в которых расположены помощники) так, что расстояние от каждого из них до Олега всегда такое же, как и расстояние от Олега до Оливера. Докажите, что на протяжении всей гонки экран касается некоторой фиксированной окружности.

Oleg and Oliver ride bicycles with the same angular speeds with Oliver riding along a circular path $\mathcal{A}$ and Oleg riding along a circular path $\mathcal{T}$ of half the radius of $\mathcal{A}$. They begin from the two closest points of the circles with Oleg's circle lying inside Oliver's circle. Two assistants also move along the circle $\mathcal{T}$ holding the screen (i.e., a chord with ends at the points where the assistants are located) such that the distance from each of the assistants to Oleg is always equal to distance from Oleg to Oliver. Prove that the screen touches some fixed circle throughout all the ride.

Solution (RUS). Обозначим за O, V, X и Y Олега, Оливера и двух помощников соответственно, за S – центр положительной гомотетии окружностей $\mathcal{T}$ и $\mathcal{A}$. Из условия следует, что прямая VO всегда проходит через S, причем, так как радиусы окружностей отличаются в два раза, отрезок SV делится точкой O пополам. Отметим точку $R \neq O$ – пересечениие луча OS с $\mathcal{T}$. Поскольку равные хорды стягивают равные меньшие дуги, точка O — середина дуги XOY, то есть прямая RO содержит внутреннюю биссектрису треугольника XRY, а еще $OS = OV = OX = OY$. По лемме о трезубце это означает, что точка S является центром вписанной окружности треугольника XRY (обозначим эту окружность за ω).

Покажем, что ω является искомой окружностью. Она касается отрезка XY в силу построения, поэтому достаточно проверить, что она не зависит от времени. Как показано выше, центр ω – это S, обозначим ее радиус за r. Также обозначим за d расстояние между центрами ω и $\mathcal{T}$, а за R – постоянный радиус $\mathcal{T}$.

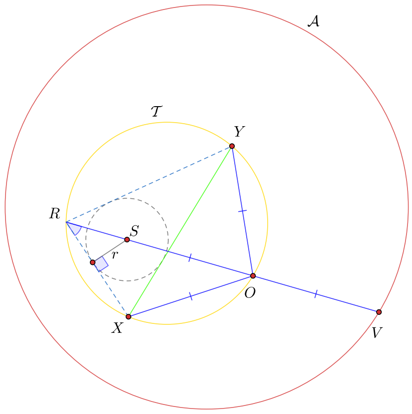
Посчитаем степень точки S относительно $\mathcal{T}$ двумя способами: $d^2 - r^2 = -RO \cdot SO = -RO \cdot OX = -RO \cdot 2R \sin \angle XRO = -2Rr$. Величины d и R не зависят от времени, поэтому r также от него не зависит, следовательно, окружность ω имеет постоянный центр и радиус, что и требовалось доказать.



Solution (ENG). Let O, V, X and Y denote Oleg, Oliver and two assistants, respectively, and S be the center of the positive homothety of $\mathcal{T}$ and $\mathcal{A}$. It follows from the condition that the line VO always passes through S, and the segment SV is bisected by the point O since radius of $\mathcal{A}$ is twice bigger than the radius of $\mathcal{T}$. Let the point $R \neq O$ be the intersection of the ray OS with $\mathcal{T}$. Since equal chords subtend equal smaller arcs, the point O is the midpoint of the arc XOY, thus the line RO contains the interior bisector of the triangle XRY, and also $OS = OV = OX = OY$. By the trillium theorem, this means that point S is the center of the inscribed circle of triangle XRY (we denote this circle by ω).

Lets show that ω is the circle required. It touches the segment XY by construction, so it is enough to check that it does not change with time. As shown above, the center of ω is S (let's denote its radius as r). We denote by d the distance between the centers ω and $\mathcal{T}$, and by R the radius $\mathcal{T}$ which does not depend on time.

We calculate the power of point S with respect to $\mathcal{T}$ in two ways: $d^2 - r^2 = -RO \cdot SO = -RO \cdot OX = -RO \cdot 2R \sin \angle XRO = -2Rr$. The values d and R do not depend on time, so r also does not depend on time, thus the circle ω has a constant center and radius, which was to be proved.


$\mathcal{A}$
$\mathcal{T}$
Y
R
S
r
O
X
V